Artículo de investigación

Recepción: 28 de junio de 2018
Aprobación: 24 de enero de 2019

DIAGNÓSTICO DEL PENSAMIENTO MÉTRICO CON ESTUDIANTES DE GRADO SÉPTIMO

METRIC THINKING DIAGNOSIS WITH SEVENTH GRADE STUDENTS

Angela Rocío Tuta Mora
Especialista en Informática para la docencia
Colegio Cooperativo Reyes Patria.
(Sogamoso, Colombia)
angela.tuta@uptc.edu.co

Arley Zamir Chaparro Cardozo
Magister en Educación
Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.
(Tunja, Colombia)
arley.chaparro@uptc.edu.co

José Francisco Leguizamón Romero
Doctor en educación
Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.
(Tunja, Colombia)
https://orcid.org/0000-0002-4131-9582
francisco.leguizamon@uptc.edu.co

Resumen

Se presentan los resultados de la fase diagnóstica de una investigación más amplia, que tuvo como objetivo fortalecer el pensamiento métrico en estudiantes de grado séptimo a través de situaciones del contexto extraescolar, ya que se pudo evidenciar que los estudiantes solo realizan procesos de conversión, descuidando la construcción de la magnitud objeto de la medición y su comprensión; es por esto que, se realizó un análisis mixto para poder comprender lo que el estudiante entiende por medición y conocer las dificultades sobre los conceptos asociados al pensamiento métrico. Uno de los resultados que arroja la prueba diagnóstica, es que a los estudiantes les falta profundizar más en cuanto al proceso de la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos, que va ligado con la comunicación, pero también se debe lograr una mejor claridad acerca del objeto matemático sobre el que actúa el estudiante y la delimitación de la acción que sobre dicho objeto va a ejecutar según el propósito o fin a lograr.

Palabras clave: pensamiento métrico, medición, enseñanza de las matemáticas, escuela secundaria, plan de estudios secundarios.

Abstract

The results of the diagnostic phase of a broader research are presented, which had the objective of strengthening metric thinking in seventh grade students through situations of the extracurricular context, since it could be evidenced that students only perform conversion processes, by neglecting the construction of the magnitude that is the object of the measurement and its comprehension; for this reason, a mixed analysis was carried out in order to understand what the student understands by measurement and to know the difficulties on the concepts associated with metric thinking. One of the results of the diagnostic test is students need to go deeper into the process of elaboration, comparison and exercise procedures, which is connected with communication, but it is also necessary to achieve better clarity about the mathematical object on which the student acts and the delimitation of the action that the student is going to perform on that object according to the purpose or goals to be achieved.

Keywords: metric thinking, measurement, mathematics teaching, secondary school, secondary curriculum.

DIAGNÓSTICO DE PENSAMENTO MÉTRICO COM ESTUDANTES DE SÈTIMA SERIE

Resumo

São apresentados os resultados da fase diagnóstica de uma investigação mais ampla, que objetivou fortalecer o pensamento métrico em alunos da sétima série através de situações no contexto extracurricular, uma vez que pôde ser evidenciado que os alunos realizam apenas processos de conversão, negligenciando a construção do objeto de magnitude da medição e seu entendimento; Por isso, foi realizada uma análise mista para entender o que o aluno entende por mensuração e conhecer as dificuldades sobre os conceitos associados ao pensamento métrico. Um dos resultados do teste de diagnóstico é que os alunos precisam aprofundar o processo de elaboração, comparação e exercício de procedimentos, que está vinculado à comunicação, mas com maior clareza sobre o objeto matemático no qual o aluno age e a delimitação da ação que será executada no objeto de acordo com o objetivo ou objetivo a ser alcançado.

Palavras-chave: pensamento métrico, medição, ensino de matemática, ensino médio, currículo do ensino médio.

DIAGNOSTIC DE LA PENSEE METRIQUE CHEZ LES ELEVES DE SEPTIEME ANNEE

Résumé

Les résultats de la phase de diagnostic d'une recherche plus large sont exposés, dont l'objectif était de renforcer la pensée métrique chez les élèves de septième année à travers des situations du contexte extrascolaire, puisqu'il a été démontré que les élèves ne font que des processus de conversion, en négligeant la construction de l'objet grandeur et sa compréhension ; pour cette raison une analyse mixte a été effectuée avec pour but de comprendre ce que les élèves entendent par mesure et connaître les difficultés liées aux notions de la pensée métrique. Entre autres résultats du test de diagnostic, les élèves doivent approfondir le processus d'élaboration, de comparaison et d'exercice des procédures, qui est lié à la communication, mais il est également nécessaire de mieux préciser l'objet mathématique sur lequel l'élève agit et la délimitation de l'action qu'il va effectuer sur cet objet en fonction du but ou des objectifs à atteindre.

Mots-clés: pensée métrique, mesure, enseignement des mathématiques, école secondaire, programme d'études secondaires.

Introducción

El presente artículo muestra los resultados a nivel diagnóstico de una investigación más amplia, que busca extender las posibilidades pedagógicas y didácticas de las mediaciones extraescolares en el desarrollo del pensamiento métrico. Se aborda el análisis de las nociones que tienen los estudiantes sobre el uso de los conceptos de medida en situaciones cercanas a sus contextos cotidianos, más específicamente en situaciones que no demanden un conocimiento intramatemático o propiamente escolarizado.

El Ministerio de Educación Nacional (MEN) ha definido en los Lineamientos Curriculares en Matemáticas (MEN, 1988), algunas orientaciones fundamentales sobre la manera como se deben abordar los contenidos relacionados con la medición y comparación de cantidades. Sin embargo, es muy frecuente que en las instituciones educativas estos temas del área de matemáticas no se aborden en su totalidad, o se descuiden las posibles aplicaciones prácticas, lo cual trae como consecuencia que el estudiante no reconozca el significado real que tienen estos conceptos ni desarrolle habilidades, tales como la estimación, las cuales son muy útiles en la vida diaria.

El papel del docente en el proceso de construir sistemas de significados sobre los conceptos matemáticos es fundamental,

La investigación tiene como motivación la preocupación por el bajo desempeño de los estudiantes del Colegio Cooperativo Reyes Patria en la asignatura de geometría, específicamente en los contenidos relativos a magnitud, cantidad y medida, reconociendo que el desarrollo de estos conceptos además de permitirle al estudiante aplicarlos a su vida diaria, también son de suma importancia en el contexto escolar en otras áreas, tales como la física, la química, ciencias naturales, entre otras. Además, con el objeto de promover el pensamiento matemático como un sistema integrador, también se ha visto necesario fortalecer *procesos generales de la actividad matemática* (MEN, 1998).

El papel del docente en el proceso de construir sistemas de significados sobre los conceptos matemáticos es fundamental, lo cual implica el desarrollo de acciones tanto pedagógicas como didácticas, que le permitan al estudiante el desarrollo del pensamiento matemático; por otra parte, el docente también tiene la labor de juzgar la pertinencia de los contenidos en los planes curriculares de cada una de las instituciones, de manera que estos planes no funcionen prescriptivamente, sino que se puedan adaptar a los ritmos de aprendizaje y los contextos específicos de los estudiantes (Leguizamón, Patiño y Suárez, 2015).

Frecuentemente, en el aula de clases se inician los temas de las magnitudes directamente con el manejo de patrones estandarizados de medida, múltiplos y submúltiplos, y estos en contextos aritméticos, aplicando tablas y factores de conversión, reduciendo la conceptualización de las magnitudes y sus medidas al proceso de agregar y quitar ceros; es decir, que no se establecen nexos entre el tratamiento físico de las magnitudes y el tratamiento matemático (Gutiérrez y Vanegas, 2005); es por esto que se busca que los estudiantes de la Institución en estudio puedan iniciar el proceso de conceptualización de magnitud, cantidad y medida, con la ayuda de situaciones del contexto extraescolar como mediador pedagógico.

De otra parte, como lo señala Bishop (2005), desde una perspectiva antropológica, medir es una actividad significativa en todas las culturas, pues en todas se establecen criterios de valoración sobre las cualidades de los objetos o fenómenos del contexto; por esta razón, medir es una actividad considerada como una de las prácticas universales de las matemáticas, puesto que:

Es claro que hacer una estimación a "ojo" es una técnica no verbal de uso mundial para medir objetos, pero a medida que la cualidad cobra peso y a medida que el número de objetos aumenta, entonces la lengua desarrolla niveles (v.g., primero, segundo, tercero, etc.) y los adjetivos se hacen nombres (v.g., "pesado" se convierte en "peso") (p. 48).

La riqueza de la exploración del contexto, además de acercar al estudiante a una actividad matemática, también le permite acercarse a su cultura.

El pensamiento métrico y los sistemas de medida

En Colombia, el sistema educativo a diferencia de otros países, funciona a partir de un currículo unificado para todo el territorio nacional, que fue definido por el MEN en el marco de las políticas de renovación curricular de los años 80, y que para el área de matemáticas, la propuesta contempla tanto las diferentes tendencias y concepciones sobre la naturaleza de las matemáticas, además de los diferentes tipos de pensamiento en definidos para ésta área, así como las corrientes pedagógicas y didácticas que, para ese momento, eran conocidas por la comunidad de investigadores en Educación Matemática. Esta propuesta se consolida en un documento denominado Lineamientos Curriculares en Matemáticas (MEN, 1998), que describe los conocimientos básicos que todo estudiante en Colombia debe desarrollar para desenvolverse tanto en el ámbito escolar como en la vida cotidiana, mediante el desarrollo del pensamiento matemático.

Para lograr que los estudiantes del país sean matemáticamente competentes, los Lineamientos Curriculares en Matemáticas plantean una perspectiva tanto pedagógica como una serie de consejos didácticos. La perspectiva pedagógica de los Lineamientos, se basa en el desarrollo de un *enfoque de sistemas*, en el cual se considera la interrelación entre los diferentes conocimientos básicos, los procesos generales de la actividad matemática y los contextos.

En Colombia, el sistema educativo a diferencia de otros países, funciona a partir de un currículo unificado para todo el territorio nacional,

Los conocimientos básicos en matemáticas buscan desarrollar en el estudiante diferentes estructuras de pensamiento, así como la apropiación de los diferentes sistemas con los que se operan los objetos matemáticos. Los conocimientos básicos se han organizado mediante cinco pensamientos y sistemas, a saber: pensamiento numérico y sistemas numéricos, pensamiento espacial y sistemas geométricos, pensamiento métrico y sistema de medidas, pensamiento aleatorio y sistema de datos, y finalmente el pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos.

El pensamiento métrico y sistemas de medidas, promueve una interacción dinámica entre las acciones de medir en el entorno y los estudiantes. Esto permite que el estudiante pueda relacionar también las actividades diarias, tales como las compras, los juegos, la cocina, entre otras, con las matemáticas que aprende en el contexto escolar y analizar de estas actividades las cualidades que son mesurables.

Es frecuente que al momento de abordar un tema los estudiantes pregunten para qué sirve este, sin embargo, una de las ventajas para la enseña de los sistemas de medidas, es la gran posibilidad de explorar variadas situaciones cercanas al contexto del estudiante, para analizar las cualidades físicas y sus medidas. Sin embargo, como lo afirma Osborne (citado en MEN, 1998):

> [...] en las escuelas actuales, gran parte de lo que se aprende sobre medición es de naturaleza puramente incidental. Los conceptos de medida aparecen en situaciones cuyo propósito es enseñar y aprender sobre el número. Se supone que la medida es intuitiva y está lo suficientemente poseída y comprendida por los alumnos como para servir de marco intuitivo en cuyo seno explicar las operaciones aritméticas. Tal presunción ha de ser puesta en tela de juicio. Además, la naturaleza de la forma en que los niños aprenden a medir y se valen de medidas en el contexto de esta transferencia exige cuidadosa atención. (p. 62).

No es de extrañarse que en el contexto extraescolar, los estudiantes tienen a la mano el mundo de las medidas y esto lo pueden comprobar con instrumentos refinados y complejos

Es de gran importancia que el estudiante pueda interactuar con el entorno para aprender los procesos de medir, ya que se encuentran situaciones de utilidad y aplicación donde el docente puede intervenir y enviar a los estudiantes a una exploración con el contexto extraescolar, que ellos mismos se den cuenta para qué les sirve este tema.

No es de extrañarse que en el contexto extraescolar, los estudiantes tienen a la mano el mundo de las medidas y esto lo pueden comprobar con instrumentos refinados y complejos. Pero, como bien se dijo anteriormente, al estar todo al alcance, entonces se descuida la necesidad de construcción de la magnitud objeto de la medición, y la comprensión y el desarrollo de procesos de medición. Otro aspecto descuidado son los marcos históricos, que le permitan al estudiante reconocer los grandes esfuerzos de las civilizaciones por tratar de llegar a la medida como una "noción de igualdad socialmente aceptada" al comparar el tamaño, la importancia, el valor, etc., en situaciones comerciales o de trueque (MEN, 1998).

Para que el estudiante comprenda los procesos de medición, se debe iniciar básicamente con imágenes especiales donde pueda identificar si es más o menos, mucho o poco, grande o pequeño, preferiblemente con modelos geométricos, aún en el caso del tiempo. Es de aclarar que, es importante referirse por separado a los sistemas geométricos, que pueden iniciarse con modelos cualitativos del espacio; y los sistemas métricos, que pueden llegar a cuantificar numéricamente las dimensiones o magnitudes que surgen de la construcción de modelos geométricos y en reacciones de los objetos externos a nuestras acciones.

Para acompañar a los estudiantes a desarrollar procesos y conceptos con el sistema métrico, los Lineamientos Curriculares proponen la construcción de los conceptos de cada magnitud, la comprensión de los procesos de conservación de magnitudes, la estimación de magnitudes y los aspectos del proceso de "capturar lo continuo con lo discreto", la apreciación del rango de las magnitudes y la selección de unidades, la selección de unidades de medida, de patrones y de instrumentos, la diferencia entre la unidad y el patrón de medición, la asignación numérica y el trasfondo social de la medición (MEN, 1998).

Teniendo en cuenta, "la selección de la unidad y la ejecución del proceso particular de asignación numérica, los objetos o procesos ya vistos selectivamente desde el punto de vista de la magnitud, así sea sólo a escala ordinal, pueden considerarse como instancias concretas de la magnitud respectiva" (Vélez, Grisales, Zapata y Rave, 2008, p. 15), igualmente los sistemas de unidades presentan una mejor medición cuando existe una necesidad ambiental o social (Bishop, 2005).

Los *procesos generales de la actividad matemática* son competencias trasversales a los conocimientos básicos, y desarrolla habilidades de pensamiento matemático. Los Lineamientos Curriculares en Matemáticas (MEN, 1998) plantean cinco procesos generales, a saber: la resolución y el planteamiento de problemas, razonamiento, comunicación, modelación, y finalmente la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos.

La resolución y el planteamiento de problemas, es un elemento de gran importancia para las matemáticas, pues se cree que la resolución de problemas debe ser un eje central y abarcarlo en su totalidad para el currículo de las matemáticas, ya que hace parte integral de la actividad diaria, siendo un objetivo primario en la enseñanza matemática, y abarcando un contexto en el cual los conceptos y herramientas sean aprendidos (Chaparro, Ávila y Caro, 2017). A medida que los estudiantes visualizan los problemas, los van resolviendo paso a paso realizando una relación entre las temáticas, ya que así van adquiriendo confianza en el uso de las matemáticas. Esto les ayuda para que su mente sea abierta y perseverante, aumenten su capacidad de comunicación matemática, y pueden desarrollar a altos niveles los procesos de pensamiento.

En todo trabajo matemático de los estudiantes, es conveniente que el razonamiento matemático esté presente, ya que puede dar cuenta del cómo y del porqué de los procesos que se siguen para llegar a conclusiones. En los lineamientos curriculares (MEN, 1998), se menciona que, al razonar, el estudiante justifica las estrategias y los procedimientos que pone en acción en el tratamiento de problemas, también estimula la necesidad de formular hipótesis, hacer conjeturas y predicciones, buscar contraejemplos, usar hechos conocidos, encontrar patrones y expresarlos matemáticamente, proponer y usar argumentos propios para expresar ideas; es decir, razonar pone en acción la capacidad de pensar.

En el aula de clases, se puede evidenciar la habilidad para expresar ideas matemáticas y la interacción que tienen entre los estudiantes, pero que por motivos o limitantes de tiempo no se le presta tanta importancia, y se cree que esto les compete a otros docentes de otras áreas (Pachón, Parada y Chaparro, 2016). En diversos estudios, se ha identificado que la comunicación es un proceso importante para poder aprender matemáticas y para resolver problemas, ya que

> […] ayuda a los niños a construir los vínculos entre sus nociones informales e intuitivas y el lenguaje abstracto y simbólico de las matemáticas; cumple también una función clave como ayuda para que los alumnos tracen importantes conexiones entre las representaciones físicas, pictóricas, gráficas, simbólicas, verbales y mentales de las ideas matemáticas. Cuando los niños ven que una representación, como puede serlo una ecuación, es capaz de describir muchas situaciones distintas, empiezan a comprender la potencia de las matemáticas; cuando se dan cuenta de que hay formas de representar un problema que son más útiles que otras, empiezan a comprender la flexibilidad y la utilidad de las matemáticas (NCTM citado en MEN, 1998, p. 95).

Usualmente, cuando se habla de las actividades matemáticas en el colegio, se puede destacar que el estudiante aprende matemáticas trabajando en ellas, pero esto va de la mano con la resolución de problemas en el contexto extraescolar, ya que esta tiene una gran conexión con las aplicaciones y la modelación, que es la forma de describir la relación que hay entre el mundo real y las matemáticas.

El matemático holandés Hans Freudenthal (1905-1990) destaca algunos elementos básicos de la construcción de modelos, dado que se habla que el punto de partida de la modelación es una situación problemática real, donde esta situación debe ser simplificada, idealizada, estructurada, sujeta a condiciones y suposiciones, y debe precisarse más, de acuerdo con los intereses del que resuelve el problema. Con lo descrito anteriormente, se puede conducir a una formulación del problema siempre y cuando se pueda manejar en el aula de clases. Treffers y Goffree (1985) describen la modelación como "una actividad estructurante y organizadora, mediante la cual el conocimiento y las habilidades adquiridas se utilizan para descubrir regularidades, relaciones y estructuras desconocidas" (MEN, 1998, p. 98).

En el currículo de amatemáticas, es de gran importancia el aprendizaje de procedimientos o la forma de saber hacer

En el currículo de matemáticas, es de gran importancia el aprendizaje de procedimientos o la forma de saber hacer, debido a que estos facilitan la aplicabilidad de las matemáticas en la vida cotidiana; en general, se entienden los procedimientos como métodos de cálculo o algoritmos (conjunto de pasos específicos que dan un resultado preciso) (Chaparro y Leguizamón, 2015). No solo es el hecho de que el estudiante razone, se comunique matemáticamente y elabore modelos de los sistemas complejos de la realidad, sino que llegue a realizar cálculos correctamente, siga instrucciones, utilice de manera adecuada la calculadora para efectuar operaciones, mida correctamente longitudes, áreas, volúmenes, etc. y pueda ejecutar tareas matemáticas.

Muchas veces, vemos en el entorno social que es muy indispensable realizar cálculos o ejercitarlos, y más cuando hay por medio una profesión que depende de esto, a causa de que la persona no puede fallar en lo más mínimo del procedimiento, ya que si no se lleva a cabalidad puede que el resultado no sea tan favorable; por ejemplo, si un odontólogo va a colorar una calza, debe saber a qué distancia la coloca, ni un milímetro más o menos, porque de lo contrario no obtendrá el éxito esperado, y así sucede con muchas más disciplinas y profesiones.

Revisión de antecedentes

A nivel internacional, los trabajos de Domenech (2013), González (2014), Picado Rico y Gómez (2015), Soriano (2018), Pizarro (2015), han abordado el problema de la enseñanza de la medida en diferentes contextos, y tienen en común el trabajo de situaciones problema en el contexto extraescolar.

Domenech (2013) de la Universidad Autónoma de Barcelona, se propuso analizar ¿cómo lo medimos?, siete contextos de indagación para detectar y corregir concepciones erróneas sobre magnitudes y unidades; la actividad que se presenta en este artículo tiene dos objetivos: detectar cualitativamente y mediante actividades de indagación, qué tipo de concepciones erróneas manifiesta el alumnado sobre las magnitudes y unidades básicas de volumen, capacidad, longitud, superficie; y contribuir a corregirlas y mejorar las habilidades de razonamiento científico, mediante el uso de andamios lingüísticos. La experiencia que se aplicó durante tres cursos académicos, con un total de 180 alumnos de 2º de ESO del Institut Marta Mata, de Montornès del Vallès; dura 4 sesiones de clase en el laboratorio, y se realizó en paralelo con el trabajo sobre factores de conversión en el aula convencional.

Con este trabajo, se permitió detectar algunas concepciones erróneas sobre magnitudes y unidades, que pueden estar inconscientemente siendo "sobrevoladas" en las clases no manipulativas o de carácter demostrativo. Consideramos que la combinación de carácter indagador y manipulador de la experiencia (hands-on minds on) ha contribuido a evidenciar esas concepciones erróneas y constituye una vía para mejorar la enseñanza de conceptos abstractos en las ciencias.

Continuando con el trabajo de González (2014) de la Universidad de Cuenca, Ecuador, que lleva por título "Estrategias Metodológicas para el aprendizaje de medida en los estudiantes de decimo "D" de Educación Básica del colegio Daniel Córdova Toral", donde trabajó con 21 alumnos, del colegio en cantón Cuenca, provincia del Azuay, durante el año lectivo 2010-2011; este trabajo se realizó al ver el promedio general en Matemática, que fue de 13,56 sobre 20, y que es el mayor porcentaje de alumnos que repiten el año de esta asignatura, sobre todo en los tres últimos años de Educación Básica Superior; lo cual llevo a preguntarse ¿Cómo las estrategias metodológicas determinan el aprendizaje de la medida en los alumnos del décimo "D" de Educación Básica del Colegio Daniel Córdova Toral?, pues el trabajo de los estudiantes se ha orientado a la realización de talleres, para que, a partir de la manipulación de material concreto y medición de objetos reales, con instrumentos de medida, se llegue a la formulación de conceptos abstractos y a la realización de operaciones matemáticas relacionadas con la medida.

Esta propuesta tuvo como fin contribuir al mejoramiento del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática y en forma particular de la medida, implementando estrategias metodológicas en el grado décimo "D" de Educación Básica del Colegio "Daniel Córdova Toral". Las estrategias que se trabajaron contemplan medidas de longitud, conversión de unidades de longitud en el Sistema Internacional y el sistema Inglés, cálculo de perímetros y áreas; además, medida de ángulos en el sistema sexagesimal y circular. Estas fueron elaboradas tomando en consideración las teorías del aprendizaje constructivista y cognitivista de Piaget, Vigotsky y Ausubel, así como las orientaciones y planteamientos de autores como Godino, Chamorro, Batanero y Roa, entre otros. También, se propuso una secuencia para el aprendizaje de medida, donde se considera los procesos de construcción del conocimiento a partir de actividades que estarían guiadas, en las que se podía utilizar material concreto, instrumentos de medida, mediciones en situaciones reales y actividades de estimación tanto de medidas de longitud, como de ángulos. La implementación de las estrategias se realizó en la modalidad de talleres. Se elaboró una guía de aplicación de las estrategias para el docente, que contiene material de trabajo del alumno y fichas de observación que permiten evaluar las destrezas, aplicando la técnica de la observación y su correspondiente registro en la lista de cotejo (González, 2014).

En otro trabajo realizado por Picado, Rico y Gómez (2013), titulado "Enseñanza de las unidades métricas en España

Esta propuesta tuvo como fin contribuir al mejoramiento del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática y en forma particular de la medida

en la segunda mitad del siglo XIX", se presentó una investigación en historia de la educación matemática, basada en el análisis de textos escolares y apreciación de distintos enfoques que caracterizan la definición, presentación y utilidad de las unidades métrico-decimales. Además, los autores distinguen el significado de los términos científicos, las equivalencias metrológicas y la aplicación de reducciones y conversiones entre sistemas en actividades comunes; todo ello, centrado en la memorización como método de aprendizaje. El objetivo de este trabajo es presentar la introducción del sistema métrico decimal (SMD) en el sistema educativo español durante la segunda mitad del siglo XIX, cambio curricular que afectó a las matemáticas escolares y se difundió mediante libros de texto, y donde el propósito general de los autores de los textos es integrar las unidades métrico-decimales con la enseñanza de la aritmética. Para ello, se identifican las características didácticas de los libros de texto, en lo que se refiere al tratamiento con que se introdujo el SMD en los inicios de esa reforma curricular.

La investigación presentada es un estudio exploratorio a partir de las respuestas al cuestionario abierto, que se hizo a los maestros de primaria

Para esta parte del estudio, se hicieron tres tipos de análisis. Primero, el análisis de contenido con sus categorías propias, con las cuales se identifican en cada manual los conceptos, procedimientos, representaciones, situaciones en que aparece y modos de uso de la nueva estructura que se estudia. Segundo, el análisis cognitivo, con cuyas categorías se identifican las expectativas, oportunidades y limitaciones para el aprendizaje de los estudiantes (consideradas por el autor del texto). Tercero, el análisis de instrucción, por medio de cuyas categorías se abordan los tipos y secuencias de tareas, modos de gestión en el aula y recursos didácticos. Para finalizar, la presentación de las unidades de medida, se caracteriza por el número de «especies de medida» o magnitudes consideradas y sus unidades principales.

Cabe destacar el trabajo realizado en la Universidad Autónoma de Barcelona por Pizarro (2015), titulado "Estimación de medida: el conocimiento diáctico de los maestros de primaria", el cual contó con la colaboración de 112 maestros, de los cuales 92 eran Licenciados en Educación Básica (profesionales que cursaron programas de formación universitaria con carteristas similares a quienes trabajan con los niveles de educación básica primaria en Colombia), 7 profesores eran Licenciados en Educación Matemática, otros 7 profesores indicaron tener grado de Magister, ya sea en currículo, gestión educacional o didáctica de la matemática; entre los 112 encuestados, también había un matemático, un ingeniero y una psicopedagoga, otros tres maestros no dieron información de su profesión. En este trabajo, se partió de la pregunta ¿qué conocimiento para enseñar la estimación de medida poseen los maestros de primaria? Por lo cual, se planteó como objetivo, caracterizar el conocimiento didáctico del contenido que tienen los profesores de primaria sobre estimación de medida discreta y continua.

La investigación presentada es un estudio exploratorio a partir de las respuestas al cuestionario abierto, que se hizo a los maestros de primaria. El foco del análisis, es caracterizar el conocimiento de los docentes sobre la enseñanza de la medida de acuerdo con los referentes teóricos expuestos. Para conseguir resultados interpretables a partir de las respuestas de los docentes, se realizó un análisis cualitativo basado en categorías descriptivas. Para una óptima, ágil y fácil codificación, utilizaron un software de análisis de datos cualitativos.

Los resultados en este trabajo, muestran diferentes aspectos sobre el conocimiento de estimación de medida de los maestros desde tres categorías diferentes, concretamente sobre cómo lo entiende, cómo lo usa y cómo lo representa; también, siete de los maestros indicaron explícitamente que estimar una medida requiere de las tres componentes – uso de referencia (R), trabajo perceptivo (P) y valoración (V) –.

Por último, a nivel internacional, se encuentra el trabajo de Soriano (2018), titulado «una propuesta didáctica para trabajar la interconversión de medidas del sistema métrico decimal sin usar "escaleras"», realizado en la Facultad de Educación de Palencia-Universidad de Valladolid, como trabajo final de grado de la Maestría en Educación primaria. Este trabajo presenta un acercamiento al Sistema Métrico Decimal a través de una metodología interdisciplinar, globalizadora y basada en la experimentación. A través del mismo, se pretende que el alumnado adquiera, en primer lugar, las competencias clave en Matemáticas y Tecnología, así como la Lingüística; y, en segundo lugar, que aumente su motivación por las asignaturas de ciencias y por el conocimiento científico.

La propuesta que se plantea se ha desarrollado en la asignatura de Matemáticas de sexto curso de Educación Primaria, en el CEIP Alonso Berruguete, de Paredes de Nava. Con este trabajo, se puede aportar una estrategia de aprendizaje que intenta ayudar a los niños a entender el Sistema Métrico Decimal, así como las relaciones que existen entre los múltiplos y submúltiplos de las diferentes magnitudes empleadas para las medidas de masa, longitud y capacidad; además, intenta, por una parte, que los alumnos tengan una comprensión relacional de los conceptos matemáticos anteriormente descritos; y, por otra, pretende ayudar a la alfabetización científica, facilitando el acercamiento de los niños a las ciencias, con todas las posibilidades que estas les pueden ofrecer, a través de una metodología motivadora, incentivando su curiosidad y sacando de ellos al científico que todos llevamos dentro (Soriano, 2018).

Con este trabajo, se mostró a los niños que las matemáticas hay que entenderlas y hay que razonarlas, no memorizarlas. Memorizar no es entender. Y para razonar bien, hay que dominar el lenguaje, por lo que la competencia lingüística y la matemática van tan unidas como la matemática y la científica. Como resumen de los aprendizajes que he adquirido con la realización de este trabajo, así como de todo lo que he aprendido durante estos años al cursar el Grado, se pensó que es importante aprovechar lo que tienen a su alrededor para enseñar a los niños a descubrir el mundo, a la vez que les motivaron para que construyan un aprendizaje significativo y duradero.

Metodología

Debido a que los problemas y fenómenos que enfrenta el ámbito educativo son cada vez más complejos y variados, se ha visto la necesidad de utilizar un enfoque mixto de investigación (Morse citado en Tashakkori y Teddlie, 2003), el cual logra una perspectiva más amplia y profunda de la situación a estudiar, ya que permite complementar las dos visiones tanto del paradigma cuantitativo como del cualitativo (Hernández, Fernández y Baptista, 2014). Los datos cuantitativos fueron obtenidos por medio de información documental sobre el desempeño de los estudiantes en el área de matemáticas; de otra parte, los datos cualitativos se obtuvieron mediante la aplicación de una prueba diagnóstica que buscó analizar los diferentes procesos en matemáticas y su relación con el pensamiento métrico.

La investigación completa se diseñó en tres fases: diagnóstico, intervención y analítica, las cuales se correlacionan con los objetivos específicos planteados. Sin embargo, en el presente artículo se muestra el diseño para la primera fase, la cual tiene un alcance descriptivo, donde se buscó determinar el estado actual del desarrollo del pensamiento métrico de los estudiantes que participan en el estudio. Este tipo de investigación es utilizada como diagnóstico, donde se responde a preguntas, tales como: ¿cuál es la relación entre?, ¿cómo es?, ¿qué diferencias existen?, ¿cómo se comporta?, ¿cómo se clasifica?; es decir, se utiliza como paso inicial para cualquier investigación de mayor alcance. En otros términos, "un estudio descriptivo determina e informa los modos de ser de los objetos" (Gay citado en Ñaupas, Mejía, Novoa y Villagómez, 2014, p. 92).

El estudio fue realizado en el Colegio Cooperativo Reyes Patria, el cual se encuentra ubicado en la cuidad de Sogamoso (Boyacá). La unidad de análisis estuvo conformada por estudiantes del grado séptimo, el cual corresponde a un nivel de escolaridad nacional de educación básica, quienes están en un rango etario de 12 a 13 años. Adicionalmente, la investigación contempló consideraciones éticas frente a la participación de los estudiantes, permitiendo que fuese de forma voluntaria y contando con el permiso tanto de la Institución como de los acudientes de los estudiantes.

Instrumentos de recolección de la información

Los principales instrumentos de recolección de la información, fueron los registros documentales y un cuestionario de preguntas abiertas.

Registros documentales. Estos corresponden a los reportes de notas del primer período académico tanto a nivel de bachillerato en cada una de las asignaturas cursadas, como en forma particular para los estudiantes de grado séptimo.

Cuestionario de preguntas abiertas. Este se diseñó partiendo de la problemática encontrada en los reportes de nota, con el ánimo de reforzar los procesos generales de la actividad matemática que se relacionan con el pensamiento métrico y sus características; se buscó mediante situaciones del contexto extraescolar, analizar cualidades con respecto a los conceptos de magnitud, medida y cantidad. Como criterios de validación de este instrumento, se realizó inicialmente un juicio de expertos y una prueba piloto para identificar inconsistencias, preguntas mal formuladas o términos desconocidos por los estudiantes.

La prueba diagnóstica contenía 20 preguntas con respecto a la asignatura de geometría y al grado en el que se encontraban cursando los estudiantes; estas preguntas se organizaron a partir de conceptos trabajados previamente con ellos: la construcción de los conceptos de magnitud, la comprensión de los procesos de conservación de magnitudes, la estimación de magnitudes y los aspectos del proceso de "capturar lo continuo con lo discreto", la apreciación del rango de las magnitudes y la selección de unidades, de patrones y de instrumentos, la diferencia entre la unidad y el patrón de medición, la asignación numérica y el trasfondo social de la medición (MEN, 1998). Con estas temáticas, se quiso hacer una correlación con los procesos generales de la actividad matemática, de tal forma que cada pregunta estaría asociada a un proceso.

Para el análisis de la prueba diagnóstico, se establecieron unos criterios de valoración basados tanto en el desempeño del pensamiento métrico como en los procesos generales. De tal forma que, se lograra determinar de qué manera los estudiantes se aproximan a los diferentes conceptos de medida cuando se enfrentan a situaciones más próximas a su contexto.

Tabla 1. Criterios de evaluación del pensamiento métrico respecto a los procesos generales

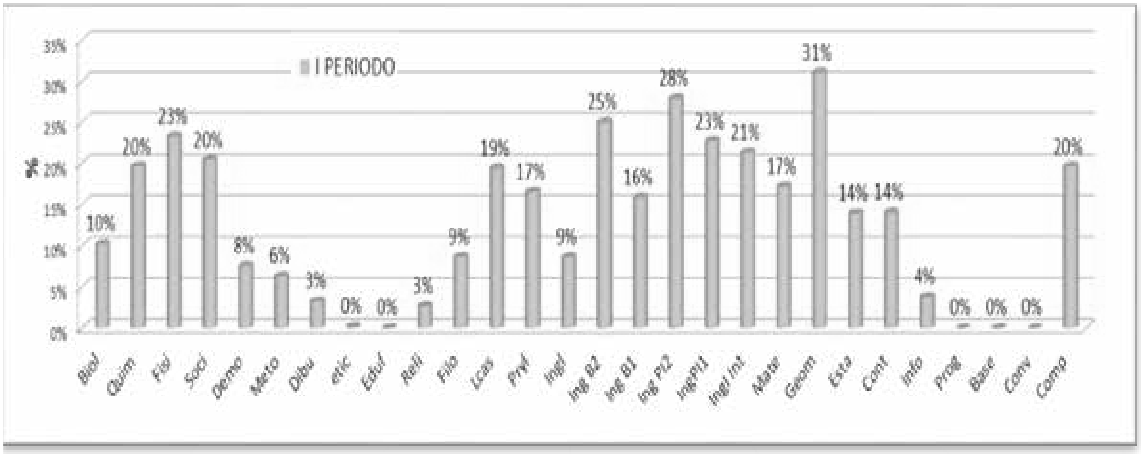
Procesos generales	BAJO	BÁSICO	ALTO	Preguntas relacionadas
La resolución y el planteamiento de problemas	El estudiante presenta dificultad para expresar ideas, interpretar, evaluar, representar, usar diferentes tipos de lenguaje y describir relaciones entre magnitudes (longitud, largo, ancho, espesor, altura, profundidad, etc.) en situaciones cotidianas, comprendiendo el problema, creando una concepción de un plan y ejecutándolo.	El estudiante sabe en algunas ocasiones expresar ideas, interpretar, evaluar, representar, usar diferentes tipos de lenguaje y describir relaciones entre magnitudes (longitud, largo, ancho, espesor, altura, profundidad, etc.) en situaciones cotidianas, comprendiendo el problema, creando una concepción de un plan y ejecutándolo.	El estudiante sabe correctamente expresar ideas, interpretar, evaluar, representar, usar diferentes tipos de lenguaje y describir relaciones entre magnitudes (longitud, largo, ancho, espesor, altura, profundidad, etc.) en situaciones cotidianas, comprendiendo el problema, creando una concepción de un plan y ejecutándolo.	8, 11
Razonar	El estudiante presenta dificultad al ordenar ideas en la mente, para llegar a una conclusión sobre la comprensión de los procesos de conservación de magnitudes (sólo se transforma de unas formas en otras), para esto debe explorar, comprobar, aplicar ideas, dar cuenta del cómo y del porqué de los procesos que se siguen para llegar a una conclusión de los conceptos de longitud, área, volumen, peso, tiempo, etc.	El estudiante sabe en algunas ocasiones ordenar ideas en la mente, para llegar a una conclusión sobre la comprensión de los procesos de conservación de magnitudes, para esto debe explorar, comprobar, aplicar ideas, dar cuenta del cómo y del porqué de los procesos que se siguen para llegar a una conclusión de los conceptos de longitud, área, volumen, peso, tiempo, etc.	El estudiante sabe correctamente ordenar ideas en la mente, para llegar a una conclusión sobre la comprensión de los procesos de conservación de magnitudes, para esto debe explorar, comprobar, aplicar ideas, dar cuenta del cómo y del porqué de los procesos que se siguen para llegar a una conclusión de los conceptos de longitud, área, volumen, peso, tiempo, etc.	1,2, 3,4,9

Comunicar	Al estudiante se le dificulta expresar ideas escribiendo, demostrando y describiendo visualmente de diferentes formas la apreciación del rango de las magnitudes junto con la selección de unidades, para esto debe comprender, interpretar y evaluar ideas que son presentadas oralmente, por escrito y en forma visual realizando una buena estimación del rango en que se halla una magnitud concreta (MEN, 1998).	El estudiante algunas veces puede expresar ideas escribiendo, demostrando y describiendo visualmente de diferentes formas la apreciación del rango de las magnitudes junto con la selección de unidades, para esto debe comprender, interpretar y evaluar ideas que son presentadas oralmente, por escrito y en forma visual realizando una buena estimación del rango en que se halla una magnitud concreta.	El estudiante sabe correctamente expresar ideas escribiendo, demostrando y describiendo visualmente de diferentes formas la apreciación del rango de las magnitudes junto con la selección de unidades, para esto debe comprender, interpretar y evaluar ideas que son presentadas oralmente, por escrito y en forma visual realizando una buena estimación del rango en que se halla una magnitud concreta.	10,12, 13,15, 16, 18
Modelación	Al estudiante se le dificulta dar conclusiones, calcular y revisar ejemplos concretos, aplicar métodos conocidos y dar resultados matemáticos, como también se le dificulta encontrar una diferencia entre las unidades y el patrón de medición, teniendo en cuenta la asignación numérica. Estos resultados deben ser validados trasladándose al mundo real, para ser interpretados en relación con la situación original.	El estudiante algunas veces da conclusiones, calcula y revisa ejemplos concretos, aplica algunos métodos conocidos y da resultados matemáticos, como también algunas veces encuentra una diferencia entre las unidades y el patrón de medición, teniendo en cuenta la asignación numérica. Estos resultados deben ser validados trasladándose al mundo real, para ser interpretados en relación con la situación original.	El estudiante sabe dar correctamente las conclusiones, calcular y revisar ejemplos concretos, aplicar métodos conocidos y dar resultados matemáticos, como también encontrar una diferencia entre las unidades y el patrón de medición, teniendo en cuenta la asignación numérica. Estos resultados deben ser validados trasladándose al mundo real, para ser interpretados en relación con la situación original.	5,6,20

La elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos	Al estudiante se le dificulta realizar estrategias, métodos, técnicas, usos y aplicaciones diversas, dejando ver en él la poca capacidad de enfocar y resolver cálculos correctamente en el trasfondo social de la medición de una forma habilidosa e independiente, más estratégica y eficaz, con prontitud, precisión y exactitud, manejando las conversiones de unidades y las operaciones en unos cuantos contextos diferentes que contengan longitudes, áreas, volúmenes, etc. y pueda ejecutar tareas matemáticas.	El estudiante sabe en ocasiones realizar estrategias, métodos, técnicas, usos y aplicaciones diversas, dejando ver en él la capacidad media de enfocar y resolver cálculos correctamente en el trasfondo social de la medición de una forma habilidosa e independiente, más estratégica y eficaz, con prontitud, precisión y exactitud, manejando las conversiones de unidades y las operaciones en unos cuantos contextos diferentes que contengan longitudes, áreas, volúmenes, etc. y pueda ejecutar tareas matemáticas.	El estudiante sabe correctamente realizar estrategias, métodos, técnicas, usos y aplicaciones diversas, dejando ver en él la capacidad de enfocar y resolver cálculos correctamente en el trasfondo social de la medición de una forma habilidosa e independiente, más estratégica y eficaz, con prontitud, precisión y exactitud, manejando las conversiones de unidades y las operaciones en unos cuantos contextos diferentes que contengan longitudes, áreas, volúmenes, etc. y pueda ejecutar tareas matemáticas.	7,14, 17,19

Nota: Las preguntas y criterios de valoración fueron diseñados y agrupados a partir de los Lineamientos Curriculares en Matemáticas (MEN, 1998).

Resultados

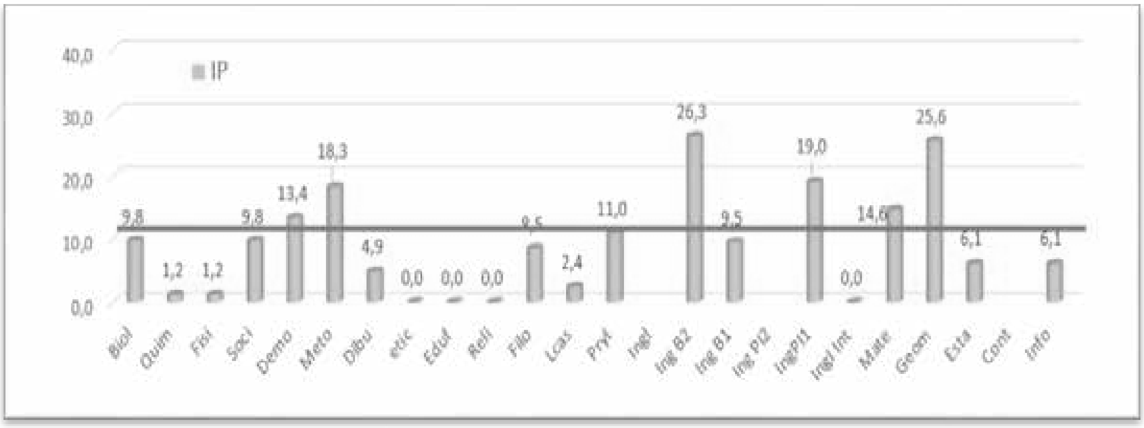


Gráfica 1. Mortalidad por asignaturas en bachillerato primer periodo académico 2019.

Inicialmente, se presentan los resultados de la mortalidad académica de los estudiantes por asignaturas en los grados de bachillerato en el año 2019, mostrando que la asignatura de geometría es la que presenta mayor grado de mortalidad, información que fue facilitada por la Coordinación Académica del Colegio.

En los resultados, se puede observar (gráfica 1) que la asignatura que tiene mayor mortalidad académica es geometría, con 31 %; siendo esto un motivo de alarma para la Institución. A partir de esto, a nivel interno, por parte de la coordinación se hizo un análisis, pero ahora por niveles para tratar cada tema por separado y para que cada docente pudiera manejar esta problemática de manera específica, ya que dentro de las políticas de la Institución se tiene como objetivo que los estudiantes puedan superar sus debilidades mejorando de forma dinámica y competente, articulada con la metodología constructivista y conceptual.

Luego del análisis por niveles y según cada asignatura, se pudo evidenciar, como se muestra en la gráfica 2, que en grado séptimo los estudiantes presentan una mayor debilidad en cuanto a las áreas de Inglés y Geometría, con un porcentaje de 26.3 % y 25.6 %, respectivamente. Teniendo en cuenta que el colegio pide que la mortalidad no pase del 10 %, cada docente de estas asignaturas debe elaborar un plan de mejora para los estudiantes que presentan dificultades, y como es el caso particular, para la asignatura de geometría la docente titular busca la forma de incluir a sus estudiantes por medio de un proyecto donde se trabajaría en convenio con el contexto extraescolar, puesto que se puede evidenciar la falta de reconocimiento conceptual en cuanto al pensamiento métrico.



Gráfica 2. Mortalidad Académica por áreas de grado 7.

A continuación, se presentan los resultados de la prueba diagnóstica que se relaciona con el objetivo del proyecto, el cual pretendía determinar el estado actual del desarrollo del pensamiento métrico de los estudiantes de grado séptimo.

Tabla 2. Estado actual del desarrollo del pensamiento métrico de acuerdo con los procesos generales.

	BAJO %	BÁSICO %	ALTO %
La resolución y el planteamiento de problemas	**50 %**	17 %	33 %
Razonar	23 %	24 %	**52 %**
Comunicar	**52 %**	8 %	40 %
Modelación	**46 %**	9 %	44 %
La elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos	**67 %**	15 %	18 %

Estos resultados muestran el porcentaje de desarrollo de los estudiantes de un grado séptimo con sus respectivas debilidades y fortalezas, que se valoran a partir de los criterios según cada proceso de la actividad matemática (tabla 1), relacionados con el pensamiento Métrico (magnitud, cantidad y medida), que se vinculan a su vez con las preguntas de la prueba diagnóstica, de tal forma que la pregunta número uno está afín con el tema de medida, donde los estudiantes deben relaciona imágenes del contexto escolar y extraescolar que midan más de un metro, pero que también está conectada con el proceso de razonar, ya que ellos pueden seguir procesos de conservación de magnitudes; la tabla deja ver que 21 estudiantes no contestaron a esta pregunta, quizás porque no tienen claro el concepto de medida o no lo pueden relacionar con facilidad; 22 contestaron solo la mitad de la pregunta, mostrando que el proceso no es completo y que aún quedan vacíos e interrogantes por aclarar; y 47 estudiantes saben encontrar medidas correctamente según el contexto que se les presente.

Entrando en detalle, en primer lugar, se puede evidenciar que para la resolución y el planteamiento de problemas, los estudiantes presentan mucha dificultad para expresar ideas, interpretar, evaluar, representar, usar diferentes tipos de lenguaje y describir relaciones entre magnitudes (longitud, largo, ancho, espesor, altura, profundidad, etc.) en situaciones cotidianas. De acuerdo con esto, no logra comprender el problema, ni crea una concepción de un plan para poder ejecutarlo.

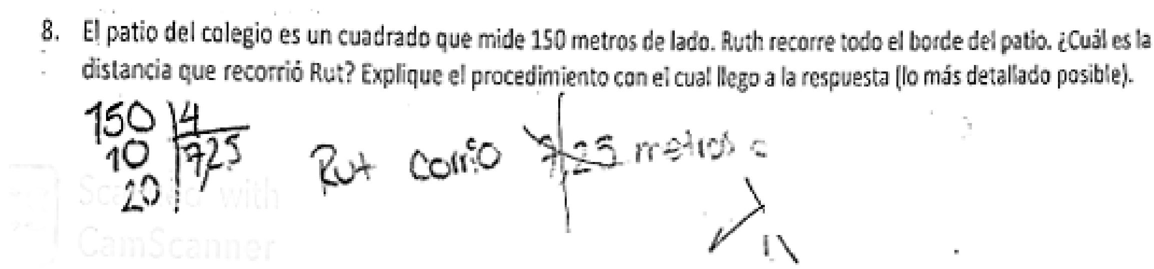
En cuanto al razonamiento, los estudiantes mostraron que saben correctamente ordenar ideas en la mente para llegar a una conclusión, aun sabiendo que el docente no podría evidenciar que es lo que piensa el estudiante, pero se puede saber a través de la comprensión de los procesos de conservación de magnitudes (solo se transforma de unas formas en otras). Para esto, debía explorar, comprobar, aplicar ideas, dar cuenta del cómo y del porqué de los procesos que se siguieron para llegar a una conclusión de los conceptos de longitud, área, volumen, peso, tiempo, etc.

En la comunicación, se puede ver que a los estudiantes se les dificulta expresar ideas escribiendo, demostrando y describiendo visualmente de diferentes formas la apreciación del rango de las magnitudes junto con la selección de unidades. Para esto, debía comprender, interpretar y evaluar ideas que fueron presentadas por escrito y en forma visual realizando una buena estimación del rango en que se halla una magnitud concreta.

Para la modelación, se puede ver que al estudiante se le dificulta dar conclusiones, calcular y revisar ejemplos concretos, aplicar métodos conocidos y dar resultados matemáticos, como también se le dificulta encontrar una diferencia entre las unidades y el patrón de medición, teniendo en cuenta la asignación numérica. Estos resultados deben ser validados trasladándose al mundo real, para ser interpretados en relación con la situación original.

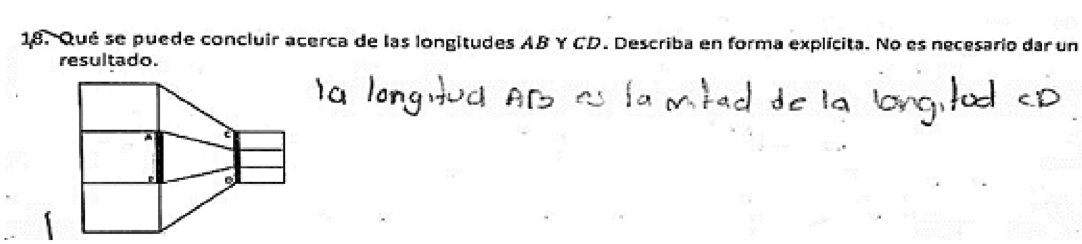
Por último, en la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos, se mostró que al estudiante se le dificultó realizar estrategias, métodos, técnicas, usos y aplicaciones diversas, dejando ver en él la poca capacidad de enfocar y resolver cálculos correctamente en el trasfondo social de la medición de una forma habilidosa e independiente, más estratégica y eficaz, con prontitud, precisión y exactitud, muestra dificultades al manejar las conversiones de unidades y las operaciones en unos cuantos contextos diferentes que contenían longitudes, áreas, volúmenes, etc.

A manera de ilustración, en la pregunta número ocho (ver grafica 3), se presenta el resultado de una situación que se caracterizó dentro del pensamiento métrico y está relacionado en cuanto a la construcción de los conceptos de cada magnitud; si bien el estudiante reconoce una de las propiedades geométricas de la figura referida a la pregunta (un cuadrado), confunde en el contexto del problema la información y la asocia con el perímetro de la figura, esto le hace pensar que le están preguntando por la medida de uno de los lados del cuadrado, cuando realmente le están preguntando por el perímetro total de la figura dado un lado. Con esta situación se pudo evidenciar que las deficiencias en los procesos de conceptualización y el análisis de magnitudes de longitud, pues llevan al estudiante a realizar cálculos que no son los adecuados para el contexto del problema.



Gráfica 3. Conflicto de aprendizaje en el proceso de "planteamiento y resolución de problemas"

En cuanto a la pregunta número dieciocho (ver gráfica 4), se relaciona con la comprensión de los procesos de conservación de magnitudes, ya que esta es la captación de aquello que permanece invariante a pesar de las alteraciones de tiempo y espacio. Acá, los estudiantes debían concluir acerca de las longitudes que se mostraban en la imagen describiendo en forma explícita sin necesidad de dar un resultado, pero los estudiantes en general no saben comunicar o se les dificulta expresar ideas escribiendo, demostrando y describiendo visualmente de diferentes formas la apreciación del rango de las magnitudes junto con la selección de unidades. Para esto, debía comprender, interpretar y evaluar ideas que fueron presentadas por escrito y en forma visual realizando una buena estimación del rango en que se halla una magnitud concreta.



Gráfica 4. Conflicto de aprendizaje en proceso de "comunicación"

Conclusiones

Con el estudio diagnóstico realizado a un grupo de estudiantes de grado séptimo, se pudo evidenciar que los estudiantes tienen dificultades en el desarrollo de temas vinculados con el pensamiento métrico; que, a su vez, se vinculan con los procesos de la actividad matemática, mostrando mayor debilidad en la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos junto con la comunicación; es claro que, los estudiantes tienen dificultades para realizar estrategias, utilizar técnicas y dar uso a diversas aplicaciones, dejando ver la poca capacidad que tienen para el manejo de las conversiones de unidades y las operaciones en unos cuantos contextos diferentes que contengan longitudes, áreas, volúmenes, etc.; y, que por tanto, si el estudiante no es capaz de realizar estos tipos de procesos, se le va a dificultar aún más expresar ideas demostrando y describiendo visualmente de diferentes formas la apreciación del rango de las magnitudes junto con la selección de unidades, teniendo poca capacidad para comprender, interpretar y evaluar ideas oralmente, por escrito y en forma visual (MEN, 1998).

Referencias

Bishop, A. (2005). *Aproximación sociocultural a la educación matemática*. Santiago de Cali: Universidad del Valle.

Chaparro A. Z. y Leguizamón J. (2015). Interacciones sociales en el patio de recreo que tienen el potencial de apoyar el aprendizaje del concepto de probabilidad. *Rle-Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *8*(3), 8-24.

Chaparro A. Z., Ávila C. y Caro A. (2017). Desarrollo de competencias matemáticas en comunicación y modelación basada en resolución de problemas. *Revista Educación y Territorio*, *7*(12), 73-93.

Domènech J. (2013). *¿Cómo lo medimos? Siete contextos de indagación para detectar y corregir concepciones erróneas sobre magnitudes y unidades*. Barcelona: IES Vilanova, Vilanova del Vallès.

Gutiérrez J. & Vanegas M. (2005). *Desarrollo del pensamiento métrico en la Educación Básica secundaria.* Medellín. Ed. Universidad de Antioquia.

González P. (2008). *Estrategias Metodológicas para el aprendizaje de medida en los estudiantes del 10mo "D" de Educación Básica del colegio Daniel Córdova Toral.* (Tesis p de Maestría). Universidad de Cuenca, Ecuador.

Hernández, R., Fernández, C. y Batista, P. (2006). *Metodología de la investigación* (4.ª ed.). México: McGraw-Hill.

Leguizamón, J., Patiño, O. y Suárez, P. (2015). Tendencias didácticas de los docentes de matemáticas y sus concepciones sobre el papel de los medios educativos en el aula. *Revista Educación Matemática*, *27*(3), 151-174.

MEN. (1998). *Lineamientos curriculares de matemáticas*. Bogotá, D.C.: Editorial Magisterio.

Ñaupas, H., Mejía, E., Novoa, E. y Villagómez, A. (2014). *Metodología de la investigación cuantitativa-cualitativa y redacción de la tesis*. Bogotá: Ediciones desde la U.

Pachón, L., Parada, A. y Chaparro, A. Z. (2016). El razonamiento como eje transversal en la construcción del pensamiento lógico. *Praxis & Saber*, *7*(14), 219-243.

Picado M., Rico L. & Gómez B. (2013). Enseñanza de las unidades métricas en España en la segunda mitad del siglo XIX. *Enseñanza de las ciencias*, *33*(3), 175-196.

Pizarro R. (2015). *Estimación de medida: el conocimiento didáctico del contenido de los maestros de primaria* (Tesis doctoral). Universitat Autónoma de Barcelona, Barcelona, España.

Soriano M. (2017-2018). *Una propuesta didáctica para trabajar la interconversión de medidas del sistema métrico decimal sin usar "escaleras"* (Trabajo de grado de Maestría). Universidad de Valladolid, Valladolid, España.

Tashakkori, A. y Teddlie, C. (2003). *Handbook of Mixed Methods in Social & Behavioral Research*. California: Sage Publications.

Vélez M., Grisales D., Zapata M. & Rave E.(2008). *Implementación del cubo como recurso didáctico para la integración de la aritmética y la geometría. Diplomada integración de la aritmética y la geometría.* Medellín: Universidad Autónoma Latinoamericana de Medellín.

Artículo de investigación

Recepción: 3 de agosto de 2018
Aprobación: 30 de enero de 2019

EL PROBLEMA DE LA TANGENTE, UNA NUEVA VISIÓN A UN ANTIGUO PROBLEMA

THE TANGENT PROBLEM, A NEW VISION TO AN ANCIENT PROBLEM

Rafael Mauricio Angarita Cervantes
Magister en Educación
Secretaría de Educación del Distrito
(Bogotá, Colombia)
rafael_angarita@javeriana.edu.co

No. 17 enero – diciembre de 2019 - ISSN 1657-463X
pp. 113 - 137

Resumen

Este artículo es el resultado de las reflexiones que, como docente de bachillerato, han surgido al notar la dificultad manifiesta de los estudiantes con respecto a la asignatura de cálculo. Se consolida una propuesta centrada en el análisis y determinación de la solución al problema de la ecuación de la recta tangente a funciones polinómicas; solución que se extiende a funciones de la forma $f(x) = ax^n f(x) = ax^n$, con $n \in \mathbb{Q} n \in \mathbb{Q}$ y $a \in \mathbb{R} a \in \mathbb{R}$, por medio de la llamada derivada de Caratheodory; se concluye con una aproximación alternativa que puede también ser objeto de estudio, incluso a nivel elemental.

Palabras clave: cálculo diferencial, recta tangente, derivada Caratheodory, geometría, polinomios.

Abstract

This article is the result of the reflections that, as a high school teacher, have emerged from noticing the students' clear difficulty regarding the calculus subject. It is consolidated a proposal focused on the analysis and determination of the solution to the equation problem of the tangent line to polynomial functions; this solution is extended to form functions$f(x) = ax^n$ $f(x) = ax^n$, with $n \in \mathbb{Q} n \in \mathbb{Q}$ and $a \in \mathbb{R} a \in \mathbb{R}$, by means of the so-called Caratheodory derivative; it is concluded with an alternative approximation that can also be object of study, even at elementary level.

Keywords: differential calculus, tangent line, Caratheodory derivative, geometry, polynomials.

O PROBLEMA DO TANGENTE, UMA NOVA VISÃO A UM VELHO PROBLEMA

Resumo

Este artigo é resultado das reflexões que, como professor de ensino médio, surgiram ao perceber a dificuldade manifesta dos alunos em relação à matéria de cálculo. Uma proposta focada na análise e determinação da solução para o problema da equação da reta tangente às funções polinomiais é consolidada; solução que se estende às funções da forma: $f(x) = ax^n$, com $n \in \mathbb{Q}$ e $a \in \mathbb{R}$, por meio da chamada derivada de Caratheodory; Conclui com uma abordagem alternativa que também pode ser estudada, mesmo no nível elementar.

Palavras-chave: cálculo diferencial, linha tangente, derivada de Caratheodory, geometria, polinômios.

LE PROBLÈME DE LA TANGENTE, UNE NOUVELLE VISION À UN PROBLÈME ANCIEN

Résumé

Cet article est le résultat des réflexions qui, comme enseignant d'école secondaire, ont émergé de la constatation de la difficulté manifeste des élèves par rapport à ce qui concerne le sujet du calcul. On consolide une proposition centrée sur l'analyse et la détermination de la solution au problème de l'équation de la ligne tangente aux fonctions polynomiales; une solution qui s'étend aux fonctions de la forme

$f(x) = ax^n f(x) = ax^n$, avec $n \in \mathbb{Q} n \in \mathbb{Q}$

et $a \in \mathbb{R} a \in \mathbb{R}$, au moyen de ce que l'on appelle le dérivé de Carathéodory; il est conclu par une approche alternative qui peut également bien faire l'objet d'études, même à l'élémentaire.

Mots-clés: calcul différentiel, tangente, dérivée de Carathéodory, géométrie, polynômes.

Introducción

Como docentes del área de matemáticas, consideramos de vital importancia el constante cuestionamiento acerca de nuestras prácticas pedagógicas; dicho ejercicio no solo debe ceñirse a la selección de un recurso didáctico o material manipulable, o un software nuevo para complementar las clases, sino también apuntar a la manera en la que acercamos a los estudiantes a los conceptos nuevos, de forma que el alcance de los objetivos de la educación sea una realidad. Cargamos además con la responsabilidad de lograr que el gusto por la asignatura aumente a medida que conocen más de ella, o avanzan de grado, luchando en contra de todos los comentarios y estereotipos de los que es objeto nuestra área, y que impiden que sean notorias y descubiertas todas esas cosas bellas y apasionantes que nosotros podemos apreciar pero que, de alguna manera, nuestros estudiantes no (MEN, 1998).

Es así que, se aporta a la discusión presentando a la comunidad la formulación de derivada según Caratheodory, que se constituye en una alternativa a la definición de derivada por medio de límites, o formulación de Cauchy, desde la cual se ha logrado abrir el espacio para explorar y pensar en algunas preguntas que han derivado en una transformación significativa de la clase de cálculo.

Algunas de las preguntas que han orientado la consolidación de esta propuesta, son: ¿cuál es la excusa para enseñar cálculo, o los métodos del cálculo, a nuestros estudiantes?, y, ¿por qué es importante que lo aprendan? La historia nos indica que los métodos del cálculo resultaron de utilidad en la solución sistemática de algunos problemas de áreas como la geometría, física, entre otros campos del saber; ante esto, ¿es posible abordar la clase de cálculo desde la necesidad, o interés, de solucionar alguno de ellos?, ¿iniciar con un problema en lugar de una serie de métodos, nociones y conceptos que puedan parecer a los estudiantes como una lista de temas necesarios para aprobar la asignatura?, ¿sería conveniente dar un papel más notorio a la historia de las matemáticas? Por ejemplo, estudiando los trabajos de aquellos personajes significativos de la historia de esta ciencia, desde la motivación de crear un ambiente controlado de trabajo matemático, iniciando con casos sencillos, escalando a los más complicados; como por ejemplo ¿cómo determinamos la recta tangente a una curva en un punto de su dominio?

Es precisamente la solución a esta última pregunta, alrededor del cual gira este escrito; iniciando con un breve estudio de algunas de las características de las funciones polinómicas, que dará una buena excusa para introducir la formulación de derivada de Caratheodory, como una herramienta potente para justificar la solución a este interrogante en un amplio grupo de funciones, sin requerir el uso del concepto de límite. Además, esta formulación admite una construcción en el software Geogebra, que permite la visualización de las tangentes a las funciones en los puntos de su dominio, constituyéndose en una verificación gráfica de la solución del problema propuesto.

Si bien este es un avance de la propuesta, se concluye la exposición de la misma con la descripción de las primeras aproximaciones a las respuestas de algunas de las dudas manifestadas por los estudiantes en este proceso, entre ellas:

- Teniendo en cuenta que las tangentes a una parábola cumplen con la definición de recta tangente dada por Euclides, ¿qué característica tiene la recta tangente a una parábola en su vértice?

- ¿Cómo determinar las coordenadas de los puntos máximos y mínimos de un polinomio en el intervalo que contiene los cortes del polinomio con el eje horizontal?

Los cuestionamientos anteriores, junto con una nueva aproximación al concepto central del cálculo diferencial, sirven como punto de partida para el desarrollo y aplicación de esta propuesta.

Discusión

El problema de la recta tangente

En las matemáticas de la antigua Grecia, encontramos algunas soluciones particulares al problema de determinar la recta tangente a algunas curvas, Knorr (1993) es una excelente referencia al respecto. Con relación a nuestras matemáticas escolares, son comunes algunos problemas que involucran la determinación de tangentes a circunferencias o problemas acerca de ángulos externos, inscritos y semi inscritos, los cuales se abordan utilizando una lista de teoremas que hacen de estos problemas algo rutinario; por ejemplo, para la construcción de una mesa circular a partir de una tabla cuadrada, pueden considerarse los bordes de la tabla como tangentes al círculo, lo que permite hacer uso de, entre otros, los siguientes teoremas:

Teorema 1. Si una recta es perpendicular a un radio en un punto del círculo, entonces la recta es tangente al círculo.

Teorema 2. Si una recta es tangente a un círculo, entonces el radio trazado hasta el punto de contacto es perpendicular a la tangente.

Junto con algunos resultados concernientes a las mediatrices de cuerdas, es posible delimitar los arcos circulares de la mesa. Estas construcciones pueden, incluso, ser elaboradas con la ayuda de software de geometría dinámica o con la ayuda de la regla y el compás. Pero, ¿y si nos interesa la tangente a una curva, no necesariamente una circunferencia, en uno de sus puntos? En particular, ¿cómo determinar la recta tangente a una función polinómica en un punto de su dominio?

Las funciones polinómicas conforman una familia con unas características muy particulares, muchas de las cuales pueden ser demostradas por medio de manipulaciones sencillas y también verificadas desde las representaciones gráficas correspondientes; se propone entonces un trabajo en el que, por medio de dos resultados importantes, se obtenga una solución metódica a dicha pregunta, y lo mejor, sin necesidad de utilizar el concepto de límite; logrando así una propuesta dirigida a las clases de matemáticas a nivel elemental y además una alternativa a considerar en las clases de cálculo diferencial.

La ecuación de una recta puede caracterizarse y determinarse de varias maneras, entre ellas: indicando la razón entre la elevación y avance de la recta, y el corte de la misma con el eje yy; o indicando dos puntos que pertenezcan a la misma. En los dos casos mencionados, hallar la ecuación requiere el cálculo de la pendiente. Entonces, si se aplica la definición de pendiente de una recta a la función $f_1(x) = pxf_1(x) = px$, y se hace uso del llamado factor común (propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma):

$$\begin{aligned} g_1(x) &= \frac{f_1(x)-f_1(a)}{x-a} \\ &= \frac{px-pa}{x-a} \\ &= \frac{p(x-a)}{x-a} \\ &= p \end{aligned}$$

Se obtiene el coeficiente de la variable que, como se sabe, corresponde al valor de la tangente del ángulo de la recta con el eje horizontal, es decir, la pendiente.

¿Qué sucede con el polinomio $f_2(x) = x^2 f_2(x) = x^2$? Aprovechando que son funciones muy bien comportadas y con el uso de algunos resultados sobre factorización de polinomios, en este caso particular, el uso de la llamada diferencia de cuadrados, es posible asegurar que

$$\begin{aligned} g_2(x) &= \frac{f_2(x)-f_2(a)}{x-a} \\ &= \frac{x^2-a^2}{x-a} \\ g_2(x) &= (x+a) \end{aligned}$$

La interpretación dada a $g_1(x)g_1(x)$ no aplica para $g_2(x)g_2(x)$, pero se insiste en pensar que $g_2(x)g_2(x)$ está relacionada con las tangentes a $f_2(x)f_2(x)$. Para ello, se aplican los cálculos anteriores a un punto perteneciente a la gráfica de $f_2(x)f_2(x)$: por ejemplo, para el punto $(a, f_2(a)) = (-2{,}4)(a, f_2(a)) = (-2{,}4)$, se sigue que $g_2(x) = x - 2g_2(x) = x - 2$ y entonces $g_2(a) = g_2(-2) = -4g_2(a) = g_2(-2) = -4$. Se tiene a disposición un punto perteneciente a la función $f_2 f_2$,$(-2{,}4)(-2{,}4)$, y un valor, $g_2(a) = -4g_2(a) = -4$; ante la intención de determinar la ecuación de la recta tangente a $f_2(x)f_2(x)$, ¿qué idea viene a nuestra mente? - ¡Utilizar esos dos datos y aplicar la forma punto - pendiente para la determinación de la ecuación de una recta! Veamos:

$$\begin{aligned} y - f_2(a) &= m(x-a) \\ y - f_2(a) &= g_2(a)(x-a) \\ y - 4 &= -4(x+2) \\ y &= -4(x+2)+4 \end{aligned}$$

¿Qué relación hay entre la función $f_2(x)f_2(x)$ y la recta $y=-4(x+2)+4$ $y=-4(x+2)+4$? (véase la Figura 1).

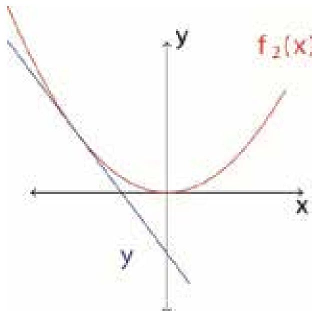


Figura 1. ¡La recta obtenida es tangente a $f_2(x)f_2(x)$ en $(-2{,}4)(-2{,}4)$!

¿Funciona siempre o solo fue suerte? Para el punto $(a,f_2(a))=\left(\frac{1}{4},\frac{1}{16}\right)(a,f_2(a))=\left(\frac{1}{4},\frac{1}{16}\right)$, se sigue que $g_2(x)=x+\frac{1}{4}g_2(x)=x+\frac{1}{4}$, y, por lo tanto, $g_2(a)=g_2\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}$ $g_2(a)=g_2\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}$; siguiendo los pasos anteriores, se obtiene la ecuación $y=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{16}y=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{16}$, cuya gráfica se puede ver en la Figura 2.

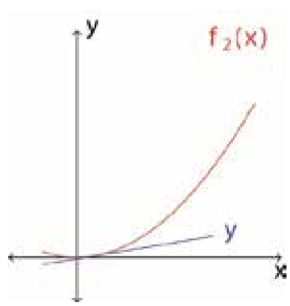


Figura 2. ¡La recta obtenida es tangente a $f_2(x)f_2(x)$ en $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{16}\right)\left(\frac{1}{4},\frac{1}{16}\right)$!

De otro lado, el punto mínimo, o el vértice, de la función $f_2(x)f_2(x)$ se encuentra en $(0,0)(0,0)$, por lo que en este punto la tangente es horizontal, es decir, la pendiente es igual a cero; y efectivamente se verifica que $g_2(0) = 0 + 0 = 0g_2(0) = 0 + 0 = 0$, con lo que hay fuertes indicios para pensar en $g_2(x)g_2(x)$ como la función de las pendientes de las rectas tangentes a $f_2(x)f_2(x)$. En efecto, al tener que $g_2(x) = x + ag_2(x) = x + a$ entonces $g_2(a) = 2ag_2(a) = 2a$, y esto coincide con los resultados que se obtendrían utilizando los métodos del cálculo diferencial, puede asegurarse que $g_2(x)g_2(x)$ sí es la función de pendientes de las rectas tangentes a $f_2(x)f_2(x)$.

Un ejemplo más: para la función $f_7(x) = x^7 f_7(x) = x^7$, en la determinación de $g_7(x)$ $g_7(x)$, con $a = -\frac{1}{3}a = -\frac{1}{3}$, el teorema del binomio de Newton (cocientes notables) cobra relevancia, pues:

$$\begin{aligned} g_7(x) &= \frac{f_7(x) - f_7(-\frac{1}{3})}{x + \frac{1}{3}} \\ &= \frac{x^7 + \left(\frac{1}{3}\right)^7}{x + \frac{1}{3}} \\ &= x^6 - \left(\frac{1}{3}\right)x^5 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 x^4 - \left(\frac{1}{3}\right)^3 x^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^4 x^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^5 x + \left(\frac{1}{3}\right)^6 \end{aligned}$$

Y procediendo de manera similar a los ejemplos anteriores, se llega a:

$$\begin{aligned} y &= g_7\left(-\frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3} \\ &= 7\left(\frac{1}{3}\right)^6\left(x + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Que corresponde a la tangente a $f_7 f_7$ en el punto $\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)$. (véase Figura 3).

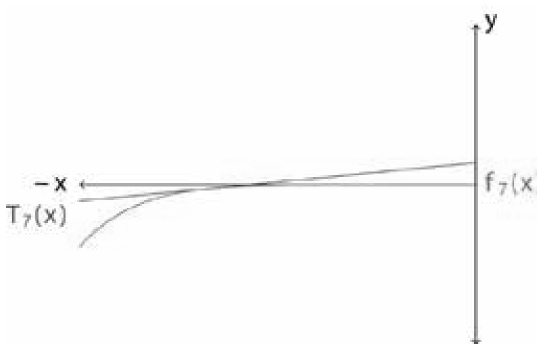


Figura 3. $f_7(x)f_7(x)$ y la recta tangente en el punto $\left(\frac{-1}{3}, f\left(\frac{-1}{3}\right)\right)\left(\frac{-1}{3}, f\left(\frac{-1}{3}\right)\right)$

Estos resultados no son mágicos, ya que el algoritmo de la división, que generaliza de forma natural los cálculos anteriores, permite demostrar que tales deducciones siempre derivarán en una función que da como resultado las pendientes de las rectas tangentes a un polinomio en un punto de su dominio y, por ende, permite la determinación de la ecuación de la recta tangente en dicho punto.

Teorema 3. Sea $p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$
$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ un polinomio de grado nn. Para todo $\beta \in \mathbb{R}$
$\beta \in \mathbb{R}$ existe un polinomio $q(x)q(x)$ tal que
$p_n(x) = (x - \beta)q(x) + p_n(\beta)$

La demostración es por inducción sobre el grado del polinomio. Para el caso $p_1(x)p_1(x)$, queda comprobado por medio de la siguiente división:

$$\begin{array}{l|l} a_1 x + a_0 & \underline{x - \beta} \\ \underline{-a_1 x + a_1\beta} & a_1 \\ a_1\beta + a_0 & \end{array}$$

De donde se sigue que
$p_1(x) = a_1 x + a_0 = a_1(x - \beta) + (a_1\beta + a_0) = (x - \beta)q(x) + p_1(\beta)$

Se supone que para un polinomio $p_k(x)p_k(x)$ de grado kk, existe $q(x)q(x)$ tal que para todo $\beta \in \mathbb{R}\beta \in \mathbb{R}$ cumple $p_k(x) = (x - \beta)q(x) + p_k(\beta)p_k(x) = (x - \beta)q(x) + p_k(\beta)$

Entonces, para $p_{k+1}(x)p_{k+1}(x)$, polinomio de grado $k + 1k + 1$ con $\beta \in \mathbb{R}\beta \in \mathbb{R}$, se tiene:

$$
\begin{array}{l|l}
a_{k+1}x^{k+1} + a_k x^k + \cdots + a_1 x + a_0 & x-\beta \\ \cline{2-2}
\underline{-a_{k+1}x^{k+1} + a_{k+1}\beta x^k} & a_{k+1}x^k \\
(a_{k+1}\beta + a_k)x^k + p_{k-1}(x) &
\end{array}
$$

Pero $(a_{k+1}\beta + a_k)x^k + p_{k-1}(x) = a_{k+1}\beta x^k + p_k(x)$ $(a_{k+1}\beta + a_k)x^k + p_{k-1}(x) = a_{k+1}\beta x^k + p_k(x)$ es un polinomio de grado kk y, por hipótesis de inducción, existe $q(x)q(x)$ tal que:

$$a_{k+1}\beta x^k + p_k(x) = (x-\beta)q(x) + (a_{k+1}\beta^{k+1} + p_k(\beta))$$

Es decir, que:

$$
\begin{aligned}
p_{k+1}(x) &= a_{k+1}x^k(x-\beta) + (x-\beta)q(x) + (a_{k+1}\beta^{k+1} + p_k(\beta)) \\
&= (a_{k+1}x^k + q(x))(x-\beta) + (a_{k+1}\beta^{k+1} + p_k(\beta)) \\
&= (a_{k+1}x^k + q(x))(x-\beta) + p_{k+1}(\beta)
\end{aligned}
$$

No sobra enfatizar que al ser $q(x)q(x)$ una función polinómica, es continua en todos los puntos del dominio de $p_n(x)p_n(x)$, y es $q(x)q(x)$ quien nos permite calcular la pendiente de la recta tangente en el punto del dominio de $p_n(x)p_n(x)$; en efecto,

$$
\begin{aligned}
p_n(x) &= (x-\beta)q(x) + p_n(\beta) \\
p_n(x) - p_n(\beta) &= (x-\beta)q(x) \\
\frac{p_n(x) - p_n(\beta)}{x-\beta} &= q(x) = g_n(x)
\end{aligned}
$$

¿Por qué se puede estar seguro acerca de las afirmaciones sobre $q(x) = g_n(x)$ $q(x) = g_n(x)$? Es posible decir algo más acerca de $g_n(x)g_n(x)$ cuando hablamos de polinomios de la forma $f_n(x) = ax^n f_n(x) = ax^n$:

Teorema 4. Sea $f_n(x) = ax^n f_n(x) = ax^n$, con $a \in \mathbb{R} a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N} n \in \mathbb{N}$. Dado $\beta \in \mathbb{R}$ $\beta \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$f_n(x) = a\left(\sum_{i=1}^{n} \beta^{i-1}x^{n-i}\right)(x-\beta) + f_n(\beta)$$

Nuevamente se hace prueba por inducción sobre nn. Para $f_1 f_1$:

$$
\begin{array}{l|l}
ax & x-\beta \\ \cline{2-2}
-ax+a\beta & a \\ \cline{1-1}
a\beta &
\end{array}
$$

De donde se sigue que $f_1(x) = a(x-\beta) + f_1(\beta) f_1(x) = a(x-\beta) + f_1(\beta)$. Incluso, para $f_2(x) = ax^2 f_2(x) = ax^2$, se obtiene por medio del algoritmo de la división:

$$
\begin{array}{l|l}
ax^2 & x-\beta \\ \cline{2-2}
-ax^2+a\beta x & ax+a\beta \\ \cline{1-1}
a\beta x & \\
-a\beta x + a\beta^2 & \\ \cline{1-1}
a\beta^2 &
\end{array}
$$

Con lo que se puede asegurar que $f_2(x) = ax^2 = a(x+\beta)(x-\beta) + f_2(\beta)$ $f_2(x) = ax^2 = a(x+\beta)(x-\beta) + f_2(\beta)$. Ahora, se establece la hipótesis de inducción: para $f_k(x) = ax^k f_k(x) = ax^k$, se cumple que

$$f_k(x) = a\left(\sum_{i=1}^{k} \beta^{i-1} x^{k-i}\right)(x-\beta) + f_k(\beta)$$

Así, para $f_{k+1} = ax^{k+1} f_{k+1} = ax^{k+1}$ se tiene:

$$
\begin{array}{l|l}
ax^{k+1} & x-\beta \\ \cline{2-2}
-ax^{k+1}+a\beta x^k & ax^k \\ \cline{1-1}
a\beta x^k &
\end{array}
$$

Luego, $f_{k+1}(x) = (ax^k)(x-\beta) + a\beta x^k f_{k+1}(x) = (ax^k)(x-\beta) + a\beta x^k$; pero, utilizando la hipótesis de inducción se puede afirmar que:

$$
\begin{aligned}
f_{k+1}(x) &= (ax^k)(x-\beta) + \beta\left(a\left(\sum_{i=1}^{k} \beta^{i-1}x^{k-i}\right)(x-\beta) + f_k(\beta)\right) \\
&= \left(\beta a\left(\sum_{i=1}^{k} \beta^{i-1}x^{k-i}\right) + ax^k\right)(x-\beta) + \beta f_k(\beta) \\
&= a\left(\left(\sum_{i=1}^{k} \beta^{i}x^{k-i}\right) + x^k\right)(x-\beta) + f_{k+1}(\beta) \\
&= a(x^k + \beta^1 x^{k-1} + \beta^2 x^{k-2} + \cdots + \beta^k)(x-\beta) + f_{k+1}(\beta) \\
&= a\left(\sum_{i=0}^{k} \beta^{i}x^{k-i}\right)(x-\beta) + f_{k+1}(\beta) \\
&= a\left(\sum_{i=1}^{k+1} \beta^{i-1}x^{(k+1)-i}\right)(x-\beta) + f_{k+1}(\beta)
\end{aligned}
$$

Corolario 1. Dado el polinomio $f_n(x) = ax^n f_n(x) = ax^n$ la función de pendientes de rectas tangentes a $f_n(x) f_n(x)$ en el punto $(\beta, f_n(\beta))(\beta, f_n(\beta))$ está dada por $g_n(\beta) = an\beta^{n-1}$ $g_n(\beta) = an\beta^{n-1}$, para todo $\beta, a \in \mathbb{R}\beta, a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}n \in \mathbb{N}$.

En efecto, utilizando el teorema 3, tenemos que:

$$f_n(x) = a\left(\sum_{i=1}^{n} \beta^{i-1} x^{n-i}\right)(x - \beta) + f_n(\beta)$$

De donde se sigue que

$$g_n(x) = a\left(\sum_{i=1}^{n} \beta^{i-1} x^{n-i}\right)$$

Por lo tanto,

$$g_n(\beta) = an\beta^{n-1}$$

Nótese la similitud del resultado del anterior corolario con los obtenidos por medio del uso de derivadas.

La anterior demostración está incompleta, en tanto que no se ha demostrado que, efectivamente, el resultado anterior corresponde a la pendiente de la recta tangente a $f_n(x) f_n(x)$, así que aún sigue sin responderse completamente la pregunta ¿por qué se puede estar seguros de $g_n(x) g_n(x)$ como función de pendientes de rectas tangentes? De otro lado, los razonamientos anteriores ha estado sujetos a polinomios, es decir se ha estado hablando de $p_n p_n$ y $f_n f_n$ donde $n \in \mathbb{N}n \in \mathbb{N}$, pero, ¿qué sucede si $n \in \mathbb{Q}n \in \mathbb{Q}$? La siguiente definición permite dar ese faltante:

Definición 1. *Derivada a la Caratheodory.* Una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es diferenciable en $\beta \in \mathbb{R}\beta \in \mathbb{R}$, si existe $q(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R} q(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continua en $\beta\beta$ y tal que

$$f(x) - f(\beta) = q(x)(x - \beta) f(x) - f(\beta) = q(x)(x - \beta) \qquad (1)$$

El valor de $q(\beta) q(\beta)$, (si $q(x) q(x)$ existe), es la derivada de ff en $\beta\beta$.

En la Figura 4, vemos la interpretación geométrica de la definición dada por Caratheodory.

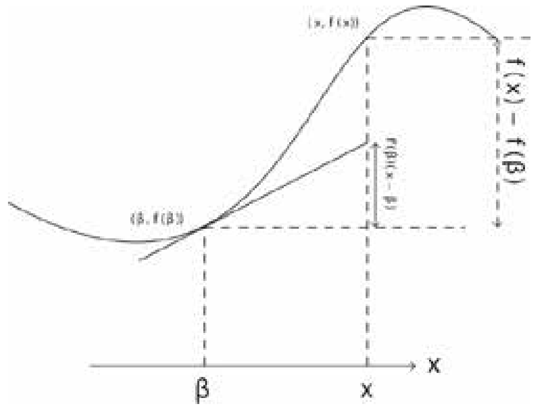


Figura 4. Interpretación geométrica derivada de Caratheodory

La definición 1 es equivalente con la definición de derivada de Cauchy:

$$\lim_{x\to\beta}\frac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta}$$

En efecto, si $f'(\beta)f'(\beta)$ existe, se define $q(x)q(x)$ como sigue:

$$q(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta} & \text{si } x\neq\beta\\ f'(\beta) & \text{si } x=\beta\end{cases}$$

Así $q(x)q(x)$ es continua en $\beta\beta$ y la Ecuación 1 se verifica para todo elemento del dominio de ff.

Recíprocamente, si la expresión (1) se verifica para cierta función $q(x)q(x)$ continua en $\beta\beta$, entonces dividiendo por $x-\beta x-\beta$ y haciendo $x\to\beta x\to\beta$, vemos que $f'(\beta)f'(\beta)$ existe y es igual a $q(\beta)q(\beta)$. Si en la expresión 1 hacemos $x\to cx\to c$, queda demostrado el siguiente:

Teorema 5. Si ff es diferenciable en $\beta\beta$, entonces es continua en $\beta\beta$.

Pero entonces, ¿cómo ayuda la definición 1 con el problema de la tangente para f_nf_n cuando $n\in\mathbf{Q}n\in\mathbf{Q}$? Por ejemplo, para calcular la pendiente de la recta tangente a la función $f_{1/3}(x)=\sqrt[3]{x}f_{1/3}(x)=\sqrt[3]{x}$ en el punto $(\beta,f_{1/3}(\beta))(\beta,f_{1/3}(\beta))$. Nuevamente se recurre al teorema del binomio de Newton (productos notables):

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{\beta} &= (\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{\beta})\left(\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x\beta}+\sqrt[3]{\beta^2}}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x\beta}+\sqrt[3]{\beta^2}}\right)\\ &= \left(\frac{x-\beta}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x\beta}+\sqrt[3]{\beta^2}}\right)\end{aligned}$$

De donde se puede asegurar que:

$$q(x)=g_{1/3}(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x\beta}+\sqrt[3]{\beta^2}}$$

Por tanto,

$$g_{1/3}(\beta)=\frac{1}{3\sqrt[3]{\beta^2}}$$

Que coincide con el resultado obtenido con la definición derivada dada por Cauchy; pero, ¿qué pasa cuando $n \in \mathbb{R} n \in \mathbb{R}$, cómo se factoriza en ese caso?

Caratheodory en Geogebra

El software de geometría dinámico Geogebra constituye una herramienta poderosa en la visualización de los resultados obtenidos por medio de la definición de derivada dada por Caratheodory. Se propone la siguiente construcción para la visualización de las tangentes a la curva de la función $f_{1/3}(x)=\sqrt[3]{x} f_{1/3}(x)=\sqrt[3]{x}$:

1. Se dibuja la función $f(x)=\sqrt[3]{x} f(x)=\sqrt[3]{x}$.
2. Se escribe la función $g(x)=\frac{1}{3x^{2/3}} g(x)=\frac{1}{3x^{2/3}}$, pero se oculta la gráfica.
3. Se crea un deslizador, que en este caso se llamará aa, cuyo valor mínimo sea $-5-5$ y el valor máximo sea 55, y el avance de $0.10.1$. Estos valores pueden cambiarse, siempre que se escoja un intervalo que pertenezca al dominio de $f(x)f(x)$. Este deslizador permitirá animar la construcción.
4. Se procede entonces a construir la recta, teniendo presente que se interpretó la función $g(x)g(x)$ como función de pendientes, y los puntos estarán dados por el deslizador aa, con lo cual se podrá animar la construcción. Es así que se ingresa la expresión $y=g(a)(x-a)+f(a)$
5. Con lo que aparecerá la gráfica de la recta tangente a $f(x)f(x)$ en el punto dado por el deslizador.

En la Figura 5 se muestra el resultado.

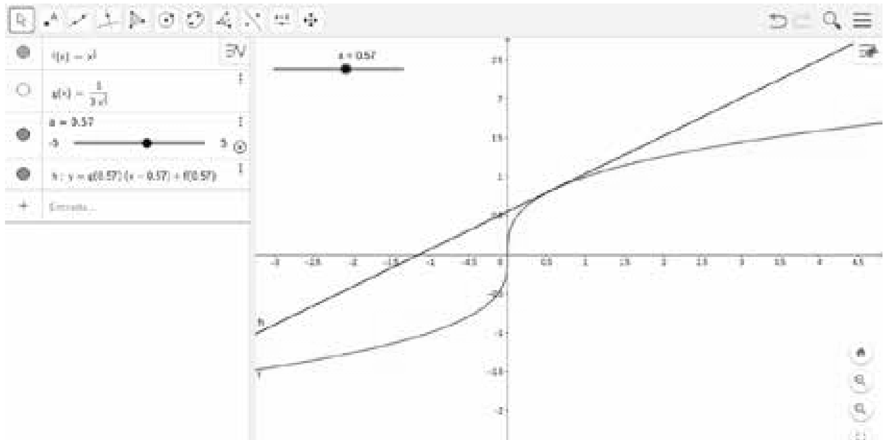


Figura 5. Visualización en Geogebra

Esta construcción tiene la ventaja que, al animar el deslizador, se visualizan las tangentes a $f(x)f(x)$ en los puntos dados por este; es importante establecer la comparación con aquellas construcciones en las que se trata de emular la definición de derivadas utilizando límites apoyándose en la construcción de una secante que pase por dos puntos de la función, y que luego acercando dichos puntos requiere de los estudiantes un acto de fe para creer que esa aproximación continua deriva en la tangente a la función.

El problema de la tangente: antes de derivada a la Caratheodory

Es un grupo de grado undécimo, del énfasis en ingeniería y TIC de la institución educativa en la que imparto clases. El tema central: estudio de las características de la familia de funciones polinómicas.

Se han consolidado algunos resultados importantes:

a. Polinomios de la forma $f(x) = mx + bf(x) = mx + b$:

i. La gráfica siempre es una línea recta, con pendiente mm y con corte en el eje vertical en el punto $(0, b)(0, b)$.

ii. Cuando la recta es horizontal, no presenta cortes con el eje horizontal, a menos que se encuentre sobre el eje horizontal.

iii. Cuando la recta es vertical, no presenta cortes con el eje vertical, a menos que se encuentre sobre el eje vertical.

iv. La única situación en la que la recta presenta corte con los dos ejes, es que sea oblicua (no perpendicular a ninguno de los ejes).

b. Polinomios de la forma $g(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0 g(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$:

i. Su gráfica es una parábola.

ii. Si $a > 0 a > 0$, la parábola *abre hacia arriba*, es decir, tiene forma de U.

iii. Si $a < 0 a < 0$, la parábola *abre hacia abajo*, es decir, tiene forma de U invertida.

iv. El vértice de la parábola tiene como coordenadas $\left(\frac{-b}{2a}, g\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)\left(\frac{-b}{2a}, g\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$.

v. Si $a > 0 a > 0$, el vértice es el punto máximo de la parábola; si $a < 0 a < 0$, el vértice es el punto mínimo de la parábola.

¿Qué tipo de relación se puede establecer entre una parábola y una recta, asumiendo que se dibujaron en el mismo plano cartesiano? Debido a que la clase no tiene como uno de sus objetivos el que los estudiantes demuestren formalmente todas sus afirmaciones, se consideran las construcciones en software de geometría dinámica como un método de validación de las afirmaciones de tipo matemático.

Es así que, los estudiantes llegan al acuerdo que entre una recta y una parábola sucede una, y solo una, de las siguientes situaciones:

a. No tienen puntos en común.

b. Tienen exactamente un punto en común (la recta es tangente a la parábola).

c. Tienen exactamente dos puntos en común.

Con estas herramientas, inicia el proceso de preguntas orientadoras hacia el problema propuesto como central en este escrito; dichas preguntas requieren que se establezcan ciertos términos y sus definiciones. Algunos de ellos son: tangente, intervalos de crecimiento, intervalos de decrecimiento, puntos críticos, entre otros. Luego, se propone a los estudiantes ciertas preguntas, desde las cuales se espera establecer relaciones entre los polinomios de primer y segundo grado. Entre otras:

a. ¿Cómo determinar la ecuación, o la gráfica, de una recta tangente a una parábola en un punto de la misma?

b. ¿Qué característica tiene una recta que es tangente a una parábola en su vértice?

Con respecto a la segunda pregunta, luego de varios bosquejos en el cuaderno y trabajo con el software Geogebra, aprovechando herramientas como *"punto de intersección"*, surge la primera conjetura:

- *Vea profesor, si dibujamos la parábola $g(x) = x^2 g(x) = x^2$, mire que el eje horizontal es tangente en el vértice. Lo mismo sucede con la parábola $g(x) = -x^2 g(x) = -x^2$,* sostienen ellos apoyados en las gráficas obtenidas en Geogebra.

La propuesta de los estudiantes merece darle una oportunidad, por lo que entre todos se buscó verificar (se insiste, no es uno de los objetivos de la clase el realizar demostraciones formales) que sucede lo mismo cuando la parábola no tiene el vértice sobre el eje horizontal.

Les es sencillo dar ejemplos de funciones cuyo gráfico sea una parábola, y con algunos ajustes orientados por los cambios que se observan en la gráfica cuando se modifican los parámetros $a, b\ y\ c a, b\ y\ c$ en la expresión $ax^2 + bx + cax^2 + bx + c$, se llega a una parábola cuyo vértice no está sobre el eje horizontal.

La herramienta "*puntos especiales*" ubica e indica las coordenadas del vértice, de manera que con la ayuda de la herramienta "*recta paralela*", haciendo clic sobre el eje horizontal y luego sobre el vértice, Geogebra muestra una recta con las características solicitadas. La herramienta "*Punto de intersección*" da la puntada final: ¡solo el vértice es el punto de intersección! La conjetura queda establecida como relación entre una recta y una parábola:

La recta que es tangente a una parábola en su vértice, es horizontal

¿Y la respuesta a la primera pregunta? Eso se desarrollará en el transcurso del año. La demostración de esta conjetura puede hacerse utilizando los conocimientos que hasta el momento tienen los estudiantes, es decir, sin el uso del concepto de derivada.

En efecto, sea la función $f(x) = ax^2 + bx + cf(x) = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0a \neq 0$ El vértice de la función tiene como coordenadas $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-b^2}{4a} + c\right)\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-b^2}{4a} + c\right)$. Sea $g(x) = m\left(x + \frac{b}{2a}\right) - \frac{b^2}{4a} + cg(x) = m\left(x + \frac{b}{2a}\right) - \frac{b^2}{4a} + c$ una recta tangente a $f(x)f(x)$ en su vértice. Supongamos que $m \neq 0m \neq 0$, y se plantea la ecuación:

$$ax^2 + bx + c = m\left(x + \frac{b}{2a}\right) - \frac{b^2}{4a} + c$$

$$ax^2 + bx + c = mx + \frac{bm}{2a} - \frac{b^2}{4a} + c$$

Agrupando términos semejantes,

$$ax^2 + x(b - m) + \left(-\frac{bm}{2a} + \frac{b^2}{4a}\right) = 0$$

Se calcula el discriminante:

$$\Delta = (b - m)^2 - 4a\left(-\frac{bm}{2a} + \frac{b^2}{4a}\right)$$

$$\Delta = b^2 - 2bm + m^2 + 2bm - b^2$$
$$\Delta = m^2$$

Bajo la hipótesis de que mm es diferente de cero, se ha demostrado que la recta tangente y la parábola tienen dos puntos diferentes en común, lo cual es contradictorio. Por lo tanto, debe ser $m = 0m = 0$, es decir, la recta es horizontal.

Se asigna como ejercicio para la casa, la siguiente función:

$$p(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$$

La actividad: determine rangos en los cuales la función es creciente, y rangos en donde es decreciente. Además, los cortes con el eje horizontal y, si es posible, los cortes con el eje vertical.

En la siguiente clase obtengo, entre otros comentarios, los siguientes: *la factorización permite asegurar que el polinomio tiene corte en el eje x en los puntos* $(3,0)$, $(2,0)(3,0)$, $(2,0)$ *y* $(1,0)(1,0)$. *Estos tres cortes con el eje horizontal sugieren que la gráfica de la función presenta un punto máximo y un punto mínimo en el intervalo* $(1,3)(1,3)$. Los estudiantes, a partir de dicha información, y calculando algunos de los valores de la función en dicho intervalo, determinan rangos aproximados en donde la función es creciente y decreciente.
Sin embargo, insisten en que requieren determinar las coordenadas de los valores máximo y mínimo de la función en mencionado intervalo.

Es así que, se apoyan en el software Geogebra para obtener una representación gráfica de la función, y con ello les es posible establecer valores aproximados de los llamados valores críticos del polinomio, y así delimitar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función. Pero, las coordenadas que da el programa para los puntos máximos y mínimos son aproximadas, y no lo consideran como una respuesta satisfactoria a la determinación de las coordenadas de estos puntos críticos.

¿Cómo se determinan las coordenadas de los puntos máximos y mínimos de una función polinómica en el intervalo en el que se encuentran todos los puntos de corte con el eje horizontal? Si se considera la gráfica de la función entre dos cortes con el eje horizontal, la forma de la gráfica parece una parábola, y se podría obtener las coordenadas de los puntos críticos si se contara con una expresión algebraica para esa parábola, ¿cómo podemos obtener la ecuación para ese trozo de función que parece parábola?

La formulación de estas preguntas generan preocupación al docente: al momento de escribir estas notas, aún no se ha iniciado el tema de derivada de Caratheodory, por lo que la respuesta no puede hacer uso de la interpretación geométrica de la derivada, ni sus métodos. Sonríen triunfantes, se felicitan entre ellos, alabanzas hay hacia el estudiante que insistió en la formulación de la duda y tratan de aliviar la angustia del docente con la frase: *tranquilo profe, ¡uno no se las sabe todas!*

Luego de cavilar un poco, se comparte con ellos el siguiente razonamiento que leí en las excelentes notas del profesor Dovermann (1999):

es posible expresar un polinomio como una suma de términos de la forma $(x-\beta)^n$ $(x-\beta)^n$, en donde $\beta \in \mathbb{R}\beta \in \mathbb{R}$, y esto puede hacerse por medio de manipulaciones elementales. En efecto, el polinomio de estudio, al realizar las multiplicaciones indicadas, queda como:

$$(x-1)(x-2)(x-3) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

Y se requiere una reescritura del mismo en términos de $(x-\beta)^n(x-\beta)^n$, con $\beta = 4$ $\beta = 4$, con lo que es necesario considerar la siguiente igualdad:

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = a_3(x-4)^3 + a_2(x-4)^2 + a_1(x-4) + a_0$$

Realizando los cálculos indicados en el término derecho de la anterior igualdad, se obtiene:

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$
$$= a_3x^3 + (\mathrm{a}_2 - 12a_3)x^2 + (48a_3 - 8\mathrm{a}_2 + a_1)x + (-64a_3 + 16a_2 - 4a_1 + a_0)$$

Igualando términos, desde acá es sencillo seguir: $a_3 = 1a_3 = 1$, por lo tanto,

$$a_2 - 12a_3 = -6$$
$$a_2 - 12 = -6$$
$$a_2 = 6$$

Igualando los coeficientes para xx, se sigue

$$48a_3 - 8\mathrm{a}_2 + a_1 = 11$$
$$48 - 48 + a_1 = 11$$
$$a_1 = 11$$

Y, finalmente,

$$-64a_3 + 16a_2 - 4a_1 + a_0 = -6$$
$$-64 + 96 - 44 + a_0 = -6$$
$$a_0 = 6$$

Es decir, se demostró la igualdad:
$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-4)^3 + 6(x-4)^2 + 11(x-4) + 6$

Ahora, se considera el término lineal de la expresión al lado derecho de la igualdad, es decir, $g(x) = 11(x-4) + 6g(x) = 11(x-4) + 6$. ¿Qué relación puede establecerse entre g$(x)(x)$ y el polinomio en estudio? Las gráficas de dichas funciones se muestran en la Figura 6.

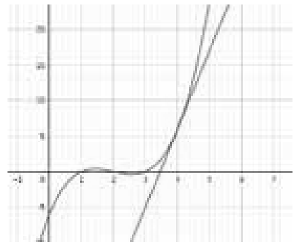


Figura 6. La función *g(x)* es tangente al polinomio

¿Por qué el término lineal corresponde a la tangente a la función en el punto cuya abcisa es 4? Se propone la siguiente justificación: considérese la reescritura de los siguientes polinomios en términos de $(x-\beta)(x-\beta)$, con $\beta \in \mathbb{R}\beta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= a_1 x \\ &= a_1(x-\beta) + a_1\beta \end{aligned}$$

De igual manera, para un polinomio de grado 22:

$$\begin{aligned} f_2(x) &= a_2 x^2 \\ &= a_2(x-\beta)^2 + 2a_2\beta(x-\beta) + a_2\beta^2 \end{aligned}$$

Un ejemplo más:

$$\begin{aligned} f_3(x) &= a_3 x^3 \\ &= a_3(x-\beta)^3 + 3a_3\beta(x-\beta)^2 + 3a_3\beta(x-\beta) + a_3\beta^3 \end{aligned}$$

Nótese la relación entre los exponentes de $\beta\beta$, de $(x-\beta)(x-\beta)$ y los valores numéricos de los coeficientes en cada uno de los términos: son similares a los obtenidos con la expansión del teorema del binomio de Newton. Entonces se asegura que:

$$f_n(x) = a_n x^{\mathrm{n}} = a_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \beta^k (x-\beta)^{n-k}$$

Por lo tanto, haciendo los cambios adecuados de escritura, el polinomio $p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k$ $p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k$ se puede reescribir como:

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1}\left[(x-\beta)^i\left\{\sum_{k=0}^{n-i}\binom{k+i}{k} a_{k+i}\beta^k\right\}\right] + p_n(\beta)p_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1}\left[(x-\beta)^i\left\{\sum_{k=0}^{n-i}\binom{k+i}{k} a_{k+i}\beta^k\right\}\right] + p_n(\beta)$$

(2)

De esta reescritura, se extrae el término lineal, es decir:

$$y = (x - \beta)\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\binom{k+1}{k} a_{k+1}\beta^k\right\} + f_n(\beta) y = (x - \beta)\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\binom{k+1}{k} a_{k+1}\beta^k\right\} + f_n(\beta)$$

(3)

¿Reconoce el lector esta expresión? ¡Exacto! Corresponde a la ecuación de una recta, en donde la pendiente se calcula por medio del término

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{k+1}{k} a_{k+1}\beta^k$$

Que, teniendo en cuenta los resultados aprendidos en cálculo diferencial, corresponde a $p'(\beta)p'(\beta)$.

Por ejemplo, si se tiene el polinomio $p_2(x) = 2x^2 + 3x - 5p_2(x) = 2x^2 + 3x - 5$, y se utiliza la expresión 2 con $\beta = -3\beta = -3$, se obtiene:

$$p_2(x) = 2x^2 + 3x - 5 = 2(x+3)^2 - 9(x+3) + 4p_2(x) = 2x^2 + 3x - 5 = 2(x+3)^2 - 9(x+3) + 4$$

(4)

Tomando la parte lineal del término a la derecha en la expresión 4, queda la función $t(x) = -9(x+3) + 4t(x) = -9(x+3) + 4$. En la Figura 6, se muestran los gráficos de $p_2(x)p_2(x)$ y $t(x)t(x)$.

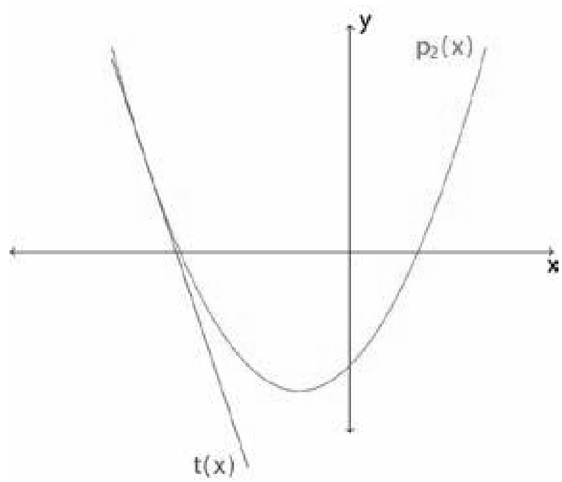


Figura 7. $t(x)t(x)$ corresponde a la tangente a $p_2(x)p_2(x)$ en $(-3, p_2(-3))(-3, p_2(-3))$

Ahora, volviendo al polinomio

$$(x-1)(x-2)(x-3)=x^3-6x^2+11x-6$$

Y a la pregunta hecha por los estudiantes, ¿Cómo ayuda la expresión 3 a determinar las coordenadas de dichos puntos?

Apoyándose en el hecho que la recta tangente en los puntos críticos debe ser horizontal, la pendiente de la misma debe ser cero, por lo que la expresión para la tangente se iguala a cero. Las soluciones de dicha ecuación corresponderían a las abcisas de los puntos críticos.

Entonces,

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{k+1}{k}a_{k+1}\beta^k=0$$

Desarrollando la sumatoria,

$$1+2(-6)\beta+3(1)\beta^2=0$$
$$1-12\beta+3\beta^2=0$$

Utilizando la fórmula cuadrática, se obtienen las abcisas de los puntos críticos, a saber:

$$x=\frac{6\pm\sqrt{33}}{3}$$

Este resultado permite obtener las abcisas de los puntos críticos de una función polinómica.

Conclusiones

La pendiente de una recta es un concepto que resulta particularmente útil para la solución de muchos de los problemas que han sido motivo de estudio desde los mismos inicios de la matemática, entre ellos: ¿cómo determinar la velocidad instantánea de una partícula en movimiento?, ¿cómo dibujar, determinar la ecuación, de la recta tangente a una curva en un punto dado?, dada una función, ¿cómo determinar sus valores máximos y mínimos?, ¿cómo optimizar el uso de materiales limitados, los ingresos, los costos, las ganancias?, entre otros.

A partir de la definición de pendiente de una recta, fue posible explorar y demostrar algunas propiedades de los polinomios y obtener resultados, con los cuales no solo se estableció un algoritmo para determinar la ecuación de la recta tangente en un punto del dominio de la función polinómica, sino que además, junto con la formulación de derivada de Caratheodory, este algoritmo pudo extenderse a funciones de la forma $f_n(x) = ax^n f_n(x) = ax^n$ con $n \in \mathbb{Q} n \in \mathbb{Q}$ y $a \in \mathbb{R} a \in \mathbb{R}$, sin necesidad de recurrir a conceptos como el de límite.

La formulación de derivada de Caratheodory permite demostrar los ya conocidos teoremas del álgebra de derivadas, es decir, para calcular derivadas de suma, resta, multiplicación, división y composición de funciones (Acosta *et al.*, 1992); así, los resultados obtenidos en este escrito se pueden aplicar a las funciones resultantes de las combinaciones, por medio de estas cinco operaciones, de los polinomios y funciones de la forma $f_n(x) = ax^n$ $f_n(x) = ax^n$ con $n \in \mathbb{Q} n \in \mathbb{Q}$ y $a \in \mathbb{R}$ $a \in \mathbb{R}$, dando un amplio rango de utilidad de los razonamientos seguidos aquí.

En mi práctica docente, he podido verificar que estas propuestas derivan en cambios significativos en la actitud de los estudiantes hacia el trabajo matemático, evidenciado esto, por ejemplo, en que el interés al atacar un problema o ejercicio no se reduce a la mera aplicación de una fórmula o la repetición de un algoritmo para dar una respuesta, sino que surge la preocupación por verificar y justificar sus resultados utilizando diversos sistemas de representación. Adicional a esto, reconocen ellos la importancia de preguntar, y buscar soluciones a dichas preguntas, como mecanismo importante en la obtención de nuevos puntos de vista, incluso en problemas no tan nuevos; de adquirir nuevos conocimientos y de utilizar de manera creativa los conocimientos adquiridos, siendo un espacio para discutir soluciones, proponer alternativas, justificar sus posiciones, redundando todo ello en el fortalecimiento de habilidades y desempeños.

Queda entonces abierta la discusión alrededor de esta propuesta, como ejemplo de un micro-mundo controlado de trabajo matemático, en donde se exploran soluciones a un problema importante en las matemáticas, pero haciendo uso de conceptos no tan complejos, como el de límite, y manipulaciones algebraicas elementales que, si bien inicialmente se limitaban a una familia particular (y por qué no, muy reducida) de funciones, los resultados son aplicables a un número importante de funciones analíticas.

Finalmente, es necesario colocar sobre la mesa la discusión acerca del dominio conceptual que se requiere del docente de matemáticas: la definición de derivada a la Caratheodory puede encontrarse en documentos como Acosta *et al.* (1992), Cañizo (2004), Gómez *et al.* (s.f.), Kuhn (1991), Pinzón *et al.* (1999) y Vargas *et al.* (2009), de hecho, la propuesta del profesor Dovermann (1999) es para un curso universitario de cálculo. Existe literatura en la que se puede encontrar otras alternativas para abordar los conceptos del cálculo, excelentes textos como Apostol (1965), y no menos importantes propuestas como Luque (1993), esta última en la que el autor muestra cómo obtener derivadas de las funciones, incluyendo funciones trigonométricas y exponenciales, en el conjunto de los números duales sin requerir del concepto de límite, y no se olvide el método desarrollado por Arquímedes para determinar la recta tangente a una parábola.

Aunque son textos especializados, y destinados a un nivel diferente al de bachillerato, sugiero el tener en cuenta textos no elementales como base para el desarrollo de propuestas didácticas y curriculares que aporten nuevos elementos a la clase de matemáticas, e incluso investigar si de esta manera se logra una articulación armónica entre el colegio y la universidad.

La transposición o adecuación de estos tópicos presentes en textos no elementales a las clases con nuestros estudiantes, puede resultar en propuestas alternativas que realmente aporten nuevas visiones a futuras investigaciones acerca de la enseñanza de los tópicos de las matemáticas escolares. No debe ignorarse la discordancia entre los objetivos y propósitos de la educación elemental con los de la educación superior. Si bien se insistió en que no se requiere de los estudiantes el desarrollo de demostraciones formales, el establecimiento, justificación, admisión o descarte de conjeturas, son competencias importantes y necesarias en el estudio de las matemáticas, que es obvio no pueden ser sustentadas en el vacío, sino bajo conocimientos específicos del área, lo cual se espera de un estudiante que aspira ingresar a la educación superior.

Conozco dos formas de proveer estos conocimientos específicos: la primera, es entregar la receta a los estudiantes y procurar verificar que la *aprendieron* asignando muchos ejercicios repetitivos; la segunda, es orientar los esfuerzos a despertar el interés por el área. El llevar esta propuesta a mi aula de clases, me ha convencido de que a los estudiantes les apasiona el reto de superar algo que le causa dificultad, el hallar la solución a algo propuesto, no importa que no haga parte necesariamente de las situaciones asociadas a su entorno inmediato.

Al final de cuentas, la escuela es un micro-mundo en donde tenemos el poder y la oportunidad de presentar a nuestros estudiantes, aspectos que despierten u orienten su interés a cosas que ellos no conocen. La frase: "*hay que trabajar lo que a ellos les llame la atención y les guste*" puede ser un poco paradójica: si es poco lo que conocen, ¿cómo sabrán qué es lo que realmente les llama la atención o les gusta?

Es decir, ¿cómo saben si les gustará este platillo si nunca lo han probado? ¿Esperaremos a que lea sobre un tema que le interese, aun cuando somos conscientes de que muy posiblemente no ha desarrollado interés por la lectura?

La relación constante del docente con el conocimiento específico del área que orienta garantizará que siempre tenga un platillo nuevo que ofrecer a sus estudiantes, que tenga opciones bajo las cuales él pueda decidir qué le parece interesante, qué le gusta, en qué puede dedicarse el resto de su vida académica y laboral.

Es así que, la conclusión central que aporto a la discusión es:

Es posible que nuestros estudiantes no vean lo hermoso de las matemáticas sencillamente porque no se las dejamos ver, o porque no se las presentamos para que las vean.

Referencias

Acosta, E., Delgado, C., y Rodríguez, C. (1992). La Derivada de Caratheodory. *Matemáticas Enseñanza Universitaria*, *2* (2), 31 - 38.

Apostol, T. (1965). *Calculus*. Nueva York, Estados Unidos. Editorial Reverté, S.A.

Cañizo, J. (2004). *Ecuaciones diferenciales ordinarias en el sentido de Caratheodory*. Recuperado de http://www.mat.uab.cat/canizo/tex/

Dovermann, K. (1999). *Applied Calculus*. Hawai, Estados Unidos. Universidad de Hawaii.

Gómez, J. y Vásquez, R. (s.f.). *Sobre un concepto de derivada (a la Caratheodory) sin el formalismo epsilón – delta de Cauchy*. Recuperado de http://intermat.fciencias.unam.mx/derivada2.pdf.

Knorr, W. (1993). *The Ancient Tradition of Geometric Problems*. Boston, Estados Unidos. Dover Publications INC.

Kuhn, S. (1991). The Derivative a La Caratheodory. *American Mathematical Monthly*, *98* (1), 40 - 44.

Luque, C. (1993). *El Cálculo: Una Versión Sin El Concepto de Límite*. Bogotá, Colombia. Universidad Pedagógica Nacional.

Ministerio de Educación Nacional MEN (1998). *Matemáticas, lineamientos curriculares*. Cooperativa Editorial Magisterio.

Pinzón, S. y Paredes, M. (1999). La derivada de Caratheodory en R2. *Revista INTEGRACIÓN*, *17* (2), 65-98.

Vargas, A., Torres, M., y Quintero, N. (2009). *La derivada a la Caratheodory, una nueva concepción en el aprendizaje y la enseñanza del cálculo*. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/720/1/laderivada.pdf

Artículo de reflexión

Recepción: 20 de junio de 2018
Aprobación: 6 de febrero de 2019

LAS ARTES: UNA MIRADA A LA CREATIVIDAD EN LA ESCUELA

ARTS: A LOOK AT SCHOOL CREATIVITY

Sandra Yaneth Chaparro Cardozo
Magíster en educación
Universidad Santo Tomás.
(Tunja, Colombia)
sandrayanethchaparro@gmail.com

Franz Alberto Benavides Rozo
Magíster en educación
Universidad Santo Tomás.
(Tunja, Colombia)
franzbenavides@ustadistancia.edu.co

Natalia Elizabeth Cañizalez Mesa
Magíster en educación
Universidad de Boyacá.
(Tunja, Colombia)
necanizalez@uniboyaca.edu.co

Resumen

El artículo de reflexión indagó la posibilidad que tienen las prácticas artísticas, y su incidencia en el desarrollo de la creatividad. Dado que las artes y la creatividad proyectan diferentes miradas en el desarrollo de habilidades que potencian el pensamiento divergente del individuo (Goleman, Kaufman & Ray, 2016), surgieron los siguientes interrogantes: ¿cómo fomentar la creatividad en la escuela desde el uso de la imagen?, y ¿qué incidencia tiene el uso de las imágenes en el desarrollo de un pensamiento creativo en la escuela? Lo que llevó a estudiar el siguiente problema: ¿cómo algunas estrategias del docente del área de educación artística y cultural fomentan la actividad creatividad en la escuela? Se realizan algunos análisis de material documental relacionado con conceptos sobre arte y creatividad, abordado desde lo cualitativo-documental. Para ello, fue necesario realizar una revisión y clasificación de documentos, además de fichas de registro, que permitieron comprender la acción creativa en el sujeto en su parte estructural y el desarrollo de habilidades artísticas, lo que permitió explorar nuevas formas de concebir el arte y su apropiación en el fomento de la educación artística.

Palabras clave: arte, creatividad, escuela, educación, formación.

Abstract

The reflection article explored the possibility that artistic practices have and their impact on the development of creativity. Since the arts and creativity project different views on the development of skills that enhance the divergent thinking of the individual (Goleman, Kaufman & Ray, 2016), the following questions came up: how to promote creativity in school from the use of the image, and what impact does the use of images have on the development of creative thinking in school? This led to the study of the following problem: how do some teachers' strategies in the area of Arts and Cultural Education encourage creative activity in the school? Some analysis of documentary material related to concepts about art and creativity is carried out, approached from the qualitative-documentary point of view. For this purpose, it was necessary to review and classify documents, as well as record cards, which allowed us to understand the creative action in the subject in its structural part and the development of artistic skills, which allowed us to explore new ways of conceiving art and its appropriation in the promotion of artistic education.

Keywords: art, creativity, school, education, training.

AS ARTES: UM OLHAR PARA A CRIATIVIDADE NA ESCOLA

Resumo

O artigo de reflexão investigou a possibilidade de práticas artísticas e seu impacto no desenvolvimento da criatividade. Dado que as artes e a criatividade projetam diferentes perspectivas sobre o desenvolvimento de habilidades que aprimoram o pensamento divergente do indivíduo (Goleman, Kaufman & Ray, 2016), surgiram as seguintes perguntas: como promover a criatividade na escola a partir do uso de imagem?, E qual a importância do uso de imagens no desenvolvimento do pensamento criativo na escola? O que levou ao estudo do seguinte problema: como algumas estratégias de professores na área da educação artística e cultural incentivam a criatividade na escola? São realizadas algumas análises do material documental relacionado aos conceitos sobre arte e criatividade, abordadas a partir do documentário qualitativo. Para isso, foi necessário realizar uma revisão e classificação dos documentos, além das fichas de registro, o que nos permitiu compreender a ação criativa do sujeito em sua parte estrutural e o desenvolvimento de habilidades artísticas, o que permitiu explorar novas formas de conceber arte e sua apropriação na promoção da educação artística.

Palavras-chave: arte, criatividade, escola, educação, treinamento.

LES ARTS: UN REGARD SUR LA CRÉATIVITÉ À L'ÉCOLE

Résumé

L'article de réflexion explore la possibilité que les pratiques artistiques puissent avoir, et leur impact sur le développement de la créativité. Étant donné que les arts et la créativité projettent des points de vue différents sur le développement de compétences qui renforcent la pensée divergente de l'individu (Goleman, Kaufman & Ray, 2016), les questions suivantes se sont posées : comment favoriser la créativité à l'école grâce à l'utilisation de l'image, et quel impact l'utilisation des images a-t-elle sur le développement de la pensée créative dans l'école ? Cela a conduit à l'étude du problème suivant : comment quelques stratégies des enseignants dans le domaine de l'éducation artistique et culturelle encouragent-elles l'activité créative dans l'école ? Une partie de l'analyse est faite à partir de matériel documentaire lié aux concepts de l'art et de la créativité, abordés sous l'angle qualitatif et documentaire. Pour cela, il a fallu revoir et classer les documents, en plus des fiches, ce qui a permis de comprendre l'action créatrice du sujet dans sa partie structurelle et le développement des compétences artistiques, ce qui a permis d'explorer de nouvelles manières de concevoir l'art et son appropriation dans la promotion de la formation artistique.

Mots-clés: art, créativité, école, éducation, formation.

Introducción

En esta propuesta, se buscó indagar la posibilidad que tienen las prácticas artísticas, y su incidencia en la formación de la creatividad. Ciertamente, se ha reconocido medianamente la importancia de la enseñanza de las artes en la educación; frente a esto, se consideró en este estudio, el reconocer que las prácticas artísticas pueden llegar a potenciar habilidades manuales y la imaginación. Sin embargo, en la actualidad se considera a las artes en algunos casos como pasatiempos, dejando de lado la importancia de las prácticas artísticas en el ámbito educativo como el puente para potenciar en los sujetos procesos inventivos, innovadores y creativos.

Esto quiere decir que, al identificar el papel de la educación artística en la escuela, se puede llegar a evidenciar su potencial no solo en la resolución de problemas, sino en la manera en que se generan espacios creativos para estimular habilidades de pensamiento en el individuo. Por ello, surge la preocupación por estudiar algunos de los fenómenos relacionados con el fomento de las artes, alrededor de la actividad creativa, y lo que ocurre con los procesos que se pueden dar en el aprendizaje, así como en el desarrollo de la personalidad del sujeto y en sus habilidades inventivas.

Frente a esto, el fomentar la educación artística en la escuela requiere de un mayor esfuerzo, dado que se evidencia un interés de esta en las presentaciones teatrales o en la decoración de espacios. Es así que, la creatividad no se da sola, teniendo en cuenta que hay que revisar que las artes potencian lo lingüístico, lo literario, lo kinestésico, lo corporal en el teatro, la danza y lo estético en las plásticas, así como su proyección visual.

Así mismo, es importante comprender que las artes y la creatividad potencian habilidades en el pensamiento divergente del sujeto, permitiendo indagar no solo sus prácticas artísticas en el ámbito educativo, sino en ámbito personal. En atención a lo anterior, emerge la necesidad de fomentar la creatividad y mirar su incidencia en todos los campos disciplinares, al igual que el uso de las imágenes y los fotogramas en el aula como recurso didáctico que fomentan el desarrollo creativo en la escuela.

Teniendo en cuenta lo anterior, se hizo necesario realizar un primer acercamiento teórico, para comprender cómo se abordan varios aspectos que están directamente relacionados en este estudio, como lo son: primero, la relación de las prácticas vinculadas con la enseñanza de las artes; y segundo, cómo se fomenta la creatividad en las escuelas. De igual manera, se realizó un acercamiento literario y de indagación en aspectos que permiten comprender, por un lado, la acción creativa en su parte estructural; y por el otro, el desarrollo de habilidades estéticas en el sujeto.

De esta manera, se planteó el problema ¿cómo algunas estrategias del docente del área de educación artística y cultural fomentan la actividad creatividad en la escuela? En esta propuesta, se buscó

De esta manera, se planteó el problema ¿cómo algunas estrategias del docente del área de educación artística y cultural fomentan la actividad creatividad en la escuela?

desarrollar algunos análisis en material documental relacionado con conceptos sobre arte y creatividad, lo que permitió determinar su articulación a los procesos creativos, abordando los elementos artísticos y creativos que se usan en la escuela.

El ejercicio investigativo se abordó desde lo cualitativo-documental, para lo cual se realizó una revisión documental, con el fin de entender algunos aspectos sobre cómo se conciben la creatividad y las artes en la escuela, al igual que las estrategias que la fomentan. Esta revisión y clasificación de documentos se llevó a cabo por medio de fichas de registro, en las cuales se hizo un seguimiento de datos específicos de diferentes fuentes consultadas.

De las teorías consultadas, se indagaron algunos elementos de la teoría de Viktor Lowenfeld (1961). En los hallazgos encontrados, se evidenció el desarrollo de la capacidad creadora y su relación con las didácticas en la educación artística. Frente a lo anterior, se han dado unas dinámicas no muy claras frente a la enseñanza de las artes, dado que se requiere tanto de personal como de material orientado a potenciar los espacios en los que se fomente la imaginación y la fantasía, dado que son cualidades no desconocidas en la actividad creadora de los sujetos.

En esta propuesta, se revisaron e indagaron aspectos relacionados con algunas formas de expresión artística, tanto en sus procesos como en los fenómenos relacionados con la creatividad y la construcción artística, al igual que la relación con la experiencia del acto creador y el producto artístico. Investigar en el arte y en la creación artística los procesos expresivos que nacen de las emociones del sujeto para la construcción de una obra, conlleva a que el espectador comprenda la idea y el sentir plasmado, y a la vez encuentre los elementos que lo conduzcan a reinventar la realidad y a favorecer la creatividad.

El enfoque cualitativo permitió entender y conocer las distintas formas del objeto de estudio y su realidad; cómo se traducen estos en expresiones artísticas y los procesos creativos dentro y fuera de una comunidad escolar. Lo que implicó una exploración frente a las nuevas formas de concebir el arte, como forma de apropiación en el fomento de la educación artística y promover la representación visual y la innovación.

Discusión

La creatividad es uno de los fenómenos que caracterizan al ser humano, y por lo tanto está vinculada a su propia naturaleza. Por mucho tiempo, la creatividad fue un concepto y un tema poco abordado, además de poco estudiado. A esta definición, se suman teóricos como Joy Paul Guilford (1952), un psicólogo estadounidense, conocido por sus estudios sobre la estructura de la inteligencia, en la cual fue necesario comprender no solo las estructuras mentales que elaboran conceptos y habilidades como un rasgo, sino que también están dados por la creatividad, para lo que fue necesario preguntarse sobre:

> ¿Qué es realmente la creatividad? ¿Es un don innato, un conjunto de habilidades que se pueden desarrollar, un rasgo más de la inteligencia general, un producto de la sensibilidad y de la creatividad? Como es de prever son muchas definiciones que existen sobre un fenómeno tan complejo y plural, cuyas características se hace muy difícil en un acto creador aislado, de la cual se deduce la creatividad ideal [...] (Cerda, 2000, p. 30).

La *creatividad* se puede interpretar como una habilidad, destreza o facilidad para inventar ideas, estrategias o soluciones de manera diferente. A esto, se suma la imagen de que los sujetos potencialmente creativos, desarrollan habilidades especiales tanto para crear obras como para comprender la realidad desde su introspección. El sujeto creativo tiene la particularidad de la genialidad y de estimular habilidades que le permiten indagar desde lo social, cultural, económico, etc., elementos que le permiten crear bien sea piezas musicales, danzarías u obras artísticas.

De igual manera, tiene que ver con los rasgos de las personas que funcionan en diversos contextos, así como la manera como percibe el mundo frente a la solución de las problemáticas, asociadas a lo cotidiano. En este punto, las habilidades creativas del sujeto, permiten la innovación y la solución a los problemas de todo tipo; lo que ha llevado a cada uno de los adelantos científicos, tecnológicos y sociales que han sido dados por una chispa de genialidad de los sujetos.

Por consiguiente, la creatividad es innata en los sujetos, pero el mantenerla requiere cultivarla y estar experimentando o reinventando ideas activamente, al igual que espacios. Frente a esto, es importante considerar que el sujeto creativo tiene la posibilidad de reinventarse y recrearse.

En las indagaciones sobre la creatividad, se ha encontrado que los procesos que han sido dados por el desarrollo de habilidades artísticas, potencian el aprendizaje, la disciplina y la comunicación. De igual manera, las artes y la creatividad han venido causando interés y preocupación en los procesos escolares, dado que promueve estrategias y potencian habilidades en los sujetos, lo que lleva a comprender los fenómenos relacionados con los sujetos creativos, la construcción artística y la experiencia con el acto creador.

Al realizar la revisión, se encontró que autores como Lowenfeld, Vigotsky y De Bono, realizaron algunas conexiones frente a la relación en el desarrollo humano y su influencia en la creatividad, conduciendo a la posibilidad de estudiar algunas de las actividades relacionadas con lo estético, lo pictórico y visual, y su incidencia de la actividad creadora o de creatividad que potencia habilidades en los sujetos.

A su vez, consideran que la educación tiene el fin de formar sujetos creativos que solucionen los problemas de cualquier índole, resolviendo las dificultades que se presentan en el entorno; por lo cual, es importante en la infancia la formación artística, ya que esta hace la diferencia entre los individuos tanto en su desempeño personal como profesional, debido a que activa el conocimiento, contribuye al desarrollo y expresión de las emociones (Lowenfeld, 1961).

Por ello, en un primer acercamiento se comprende las herramientas que permiten la experimentación, la imaginación y la innovación, así como las nuevas maneras de trabajar en el aula. Por ejemplo, "los dibujos infantiles no son un intento de traducir una imagen a formas gráficas o plásticas: son objetos dotados de asociaciones imaginarias" (Read, 1969, p. 142).

> Y es así que, [...] La creatividad ha existido desde siempre, es una habilidad del ser humano y, por lo tanto, vinculada a su propia naturaleza. Sin embargo, por mucho tiempo, la creatividad como concepto fue un tema no abordado y por lo mismo poco estudiado, es hasta años recientes donde surgen teóricos que se abocan a profundizar sobre el tema y se desarrollan trabajos y aportaciones alusivas a este concepto. (Esquivas, 2004, p. 3).

De esta manera se ratifica que el acto creativo es inherente al ser humano, por tanto no es desconocido. Al mismo tiempo, el acto o la acción creativa del sujeto va encaminado a la creación de ideas innovadoras, que buscan transformar problemáticas particulares, es decir que, el sujeto no solo desarrolla procesos artísticos encaminados a la creación de artefactos, objetos bellos o ideas tecnológicas.

Al ahondar en la creatividad y su fomento que es representado en acciones, estrategias didácticas y metodologías, se busca favorecer habilidades manuales, estéticas y plásticas en los sujetos dentro y fuera del aula. Estas habilidades estimulan el pensamiento creativo o divergente del sujeto en la escuela; es por ello que, los recursos visuales tales como videos, películas, entre otros, permiten generar espacios en los que se promueve la imaginación, fantasía y ensoñación de los sujetos.

A pesar de contar con propuestas pedagógicas, que se podrían tomar como innovadoras o espacios interactivos o los comúnmente llamados ambientes de aprendizaje por las escuelas; es importante comprender que está sucediendo con aquellas prácticas tradicionalistas que dejan de lado la actividad creadora del sujeto, coartando su imaginación. Es por ello que, "[…] la actividad creadora pudiera servir para aumentar la productividad, solucionar problemas técnicos- administrativos, desarrollar las habilidades y capacidades de las personas […]" (Cerda, 2000, p. 13).

El desarrollo de la capacidad en los sujetos, sería un detonante en la generación de nuevas ideas y estrategias en las que se daría respuesta a problemáticas educativas o de aprendizaje. Más aún, al preguntarse por ¿cómo fomentar la creatividad en la escuela desde el uso de la imagen en el aula?, ¿qué incidencia tiene el uso de las imágenes en el desarrollo de un pensamiento creativo en la escuela?, es un ejercicio en el que se promoverían nuevos medios para abordar temáticas o contenidos de diferentes temas, e impulsar el pensamiento creativo o divergente.

El incentivar la creatividad es más que un proceso mental, dado que implica tener unos rasgos de personalidad que le permiten al sujeto enfrentarse a los problemas y darles solución. Para ello, se platea el siguiente caso hipotético: hay dos sujetos, en el primer caso un sujeto considerado como el más inteligente de su clase, y en el segundo caso un sujeto con las notas más bajas y considerado con menos habilidades. A estos dos sujetos se les plantea varios problemas reales en los cuales deben pasar por varias tareas y cada uno de ellos gozaba características y habilidades diferentes; en el primer caso, el sujeto desarrolla toda una estrategia para resolver cada una de las tareas, y en algunas de ellas presenta dificultad, dado que requieren de la intuición; en el segundo caso, el sujeto revisa las tareas y va creando una posible estrategia, haciendo uso de la creatividad. Frente a lo anterior, el segundo sujeto tiene la habilidad de dar solución a problemas que requieren de la intuición y la imaginación.

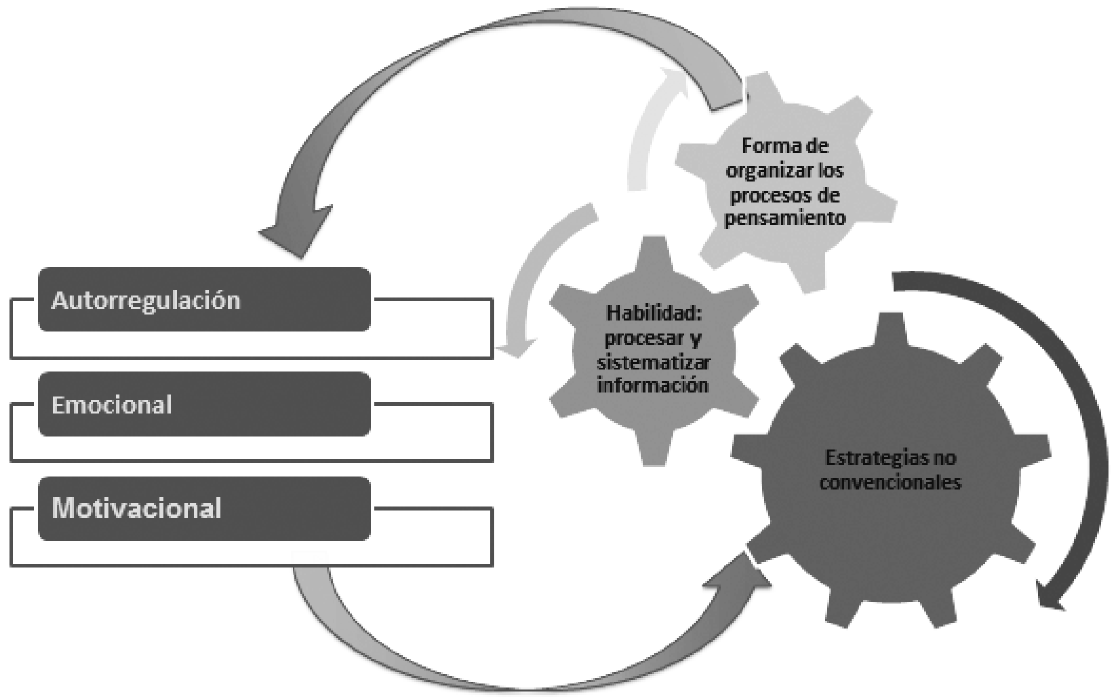


Figura 1. Proceso creativo en la resolución de problemas de los sujetos.
Fuente*: elaboración propia.*

En la gráfica, se observa el proceso creativo en los sujetos, el cual implica: 1) la autorregulación, 2) la emocionalidad y 3) lo motivacional. Estos tres elementos le permiten al sujeto la resolución de problemas usando la genialidad y la intuición, además de potenciar el pensamiento creativo en la generación de estrategias y habilidades para codificar información, lo que Cerda (2000) denomina como la capacidad de resolver problemas. Es por ello que, el sujeto cobra importancia como ser en los procesos mentales que se generan.

Frente a esto, para fomentar la actividad creadora en la escuela, se hace necesario preguntarse sobre ¿qué sentido tiene la creatividad para la escuela?, ¿cómo se está fomentando?, ¿cómo se involucra en las estrategias pedagógicas, didácticas y curriculares?, ¿qué clase de ciudadanos se están formando? En este sentido, la escuela debe potenciar en los sujetos habilidades de pensamiento, mediante actividades que estimulen la capacidad para reinventar o crear, y de esta manera generar nuevas estrategias en los procesos tanto de enseñanza como de aprendizaje en la escuela.

Ciertamente, la actividad creadora permitiría a futuro indagar realidades escolares como las prácticas docentes, sus metodologías, las actitudes, entre otras, relacionadas con el proceso formativo del sujeto y las necesidades del contexto. En este ejercicio investigativo, es importante reconocer algunos factores que inciden en los procesos creativos que se llevan en las escuelas, y de esta manera llegar a entender cómo funciona el pensamiento creativo a la hora de dar soluciones a situaciones problemáticas en las que se requiere de ideas innovadoras.

De modo que, para dar respuesta a las necesidades del contexto, se precisa entender cómo inciden los factores en los procesos creativos, en lo afectivo, cognitivo y ambiental. Para ello, se hace necesario comprender la mecánica o funcionamiento de las ideas desde el pensamiento en los procesos de *enseñabilidad* y aprendizaje en la escuela.

> De ahí la importancia de la escuela en el desarrollo de la creatividad. Se requiere cada vez más del estudio de la realidad escolar con vista a plantearnos formas visibles de organizar el proceso educativo que contemplen en forma consustancial de mismo y no de modo "añadido", superficial o parcial, el desarrollo de potencial creativo de todos los miembros del grupo escolar como parte de las actividades que realizan día tras día para aprender las matemáticas, leer, expresarse, conocer la naturaleza, danzar, cantar [...] (Ferrero *et al*., 2008, p. 110).

Es importante mencionar que, la creatividad hay que estimularla, por medio de la motivación en el sujeto, en la que se fomenten sus habilidades cognitivas y artísticas. Por lo tanto, la escuela tiene un camino largo en la formación de sujetos creativos, dado que las actitudes y aptitudes, así como el pensamiento creativo, van direccionadas a la resolución de problemas del cotidiano. Por ello, la importancia de potenciar habilidades y procesos de pensamiento consistentes en el sujeto, promovidas desde el arte y sus diferentes expresiones.

En este aspecto, es importante revisar la pertinencia de las actividades escolares, dado que con el tiempo se vuelven repetitivas y rutinarias. Por consiguiente, es necesario que se vigilen los modelos de enseñanza que están determinados por una estructura escolar que, en ocasiones, influye en la constitución del comportamiento de los sujetos. Estas prácticas en las que se implementan metodologías, contenidos, concepciones pedagógicas y didácticas tradicionalistas, excluyen la actividad creativa y creadora, porque conciben las artes como aprestamiento de las extremidades corporales del sujeto, y esto es una de las cosas que imposibilita la innovación en la escuela.

> A esto, la idea que [...] las escuelas como facultades, han encontrado numerosas dificultades a la hora de incorporar la adquisición de estas habilidades a sus estrategias de enseñanza y evaluación. En concreto, las habilidades denominadas "suaves", como la mejora del propio rendimiento y aprendizaje, chocan frontalmente con el sistema de evaluación tradicional, basado en un régimen de evaluación objetivo y en una enseñanza centrada en temas aislados entre sí. (Seltzer & Bentley, 1999, p. 37).

Sumado a esto, las artes (plásticas, dramáticas, musicales y lectoescriturales) son actividades que se le denominan como relleno y no son consideradas como importantes, pero, por el contrario, son actividades que estimulan la fluidez, la fantasía, creación y originalidad en el sujeto, desarrollando no solo su sensibilidad, sino la imaginación. Estos factores creativos hacen que el sujeto desarrolle nuevas ideas y estrategias, transformando las situaciones problemáticas en situaciones favorecedoras para el entorno y creativas.

Por tanto, la actividad creadora depende de una relación del ser humano y su ambiente; de aprender por medio de los sentidos, al oler, ver, tocar, gustar, lo que constituye el centro de la construcción de la fantasía y el perfeccionamiento de las emociones del sujeto. La creatividad en sí misma no crea soluciones, es el sujeto que propicia los espacios y los momentos en los cuales nacen las ideas creativas, y para ello es necesario la experiencia, el conocimiento y, sobre todo, la imaginación.

Ahora bien, resolver o dar solución a todos los problemas de forma creativa, requiere de una variada cantidad de respuestas nuevas, innovadoras, que respondan a un tema específico, y potencien habilidades y capacidades que le permitan a los sujetos expresarse libremente.

A lo anterior, es importante preguntarse entonces: ¿qué es la creatividad? Para ello, habría que indagar su etimología; proviene del *latín creare*, e indica la facultad que tienen todos los seres humanos para crear ideas originales en el tiempo. De este modo, habría que cuestionarse si la creatividad es exclusiva de los artistas, y si esta es posible gracias a la imaginación, los sentimientos y pensamientos que son inherentes al ser humano.

La creatividad es una cualidad única del sujeto, dado que genera conexiones emocionales, comunicativas y cognitivas, permitiendo además de generar nuevas ideas, la conceptualización de datos. De este modo, la acción creativa y creadora posibilita transformar la información y las experiencias a través de los sentidos, propiciando percepciones diversas del entorno, permitiéndole al sujeto desarrollar la capacidad de cuestionar y criticar los modelos, rompiendo con los estereotipos conocidos que obstruyen el proceso creativo y el desarrollo del pensamiento divergente. Más aún, facilita abrir caminos a la diversidad de soluciones prácticas y novedosas a problemas del cotidiano a las que se encuentra inmerso el sujeto (Morales, 2017).

El sujeto creativo es capaz de imaginar y desarrollar el sentido de lo estético y artístico, para lo cual es necesario potenciar la capacidad crítica que lo conduzcan a resolver libremente ideas, permitiéndole ser autónomo e inventivo, lo que conlleva a potenciar y comprender los diferentes saberes. Lo anterior deja ver la importancia y la labor de la escuela como puente para estimular y fomentar el pensamiento divergente y la imaginación constructiva. En la actualidad, este proceso requiere desarrollar la sensibilidad necesaria para comprender el desarrollo de la fantasía y la libertad; procesos que permiten dar soluciones de forma innovadora a problemas cotidianos; por consiguiente, el arte es un componente que propicia la creatividad y la sensibilidad en el proceso de imaginación de los sujetos.

Como muestra de su evolución, la creatividad se observa no solo en las grandes galerías o museos, sino en las cavernas con los pictogramas y el arte rupestre, en las cuales el sujeto representaba su cotidiano utilizando la imaginación. Se ha visto a través de la historia, que el hombre ha utilizado el arte y los procesos creativos para expresar sus sentimientos, mediante técnicas como la pintura, escultura, danza, música, escritura, entre otras, haciendo de este tipo de manifestaciones un lenguaje perdurable que constituyen la cultura de la humanidad.

> […] la creatividad involucra procesos cognitivos, afectivos, neurológicos, sociales y de comunicación, entre otros, por lo que su estudio no puede abordarse desde un solo punto de vista. El niño al dibujar o pintar, está desarrollando un proceso complejo en el cual reúne un gran número de sub procesos orientados a darle un significado propio a su creación. Al hacerlo, está manifestando su propia visión sobre el mundo que lo rodea, está expresando la forma del cómo lo ve, cómo lo siente, cómo lo interpreta y cómo influye en su propia vida. (Dardoub, 2003, p. 3).

Teniendo en cuenta las propiedades del arte en el proceso creativo de los sujetos, es importante reconocer que desarrolla habilidades de expresión tanto emocionales, comunicativas y culturales, favoreciendo no solo imaginación, sino también potenciando habilidades que le permiten dar una interpretación del mundo.

La cultura le permite al sujeto identificar una movilidad de saberes y problemáticas que se encuentran inmersas en los contextos sociales y educativos, en los cuales se fomenta la idea de potenciar la capacidad creadora en el reconocimiento del entorno. Por ello, es fundamental comprender cómo la creatividad está inmersa en el descubrimiento y el asombro del sujeto, y es allí cuando se habla del término de innovación, generando un diálogo entre aprender, disfrutar y preguntar. A propósito de esto, Vigotsky (1996) dice que la capacidad creadora es toda aquella actividad que realiza el hombre.

Frente a esto, es importante comprender qué se está haciendo en la escuela y cómo en el ejercicio pedagógico se observan los procesos creativos en el aula, que tienden a obviar aspectos particulares como el soñar, imaginar y disfrutar. En consecuencia, el estar en una escuela no garantiza que el sujeto potencie su creatividad o que el docente desarrolle y fortalezca la actitud creativa en los procesos de enseñanza; habría que revisar factores como los modelos pedagógicos de las instituciones y de los docentes, las planeaciones de clase, entre otros. El analizar estos aspectos permite mejorar el proceso a futuro de la enseñanza-aprendizaje, y para ello es importante considerar la artística y la creatividad en el mejoramiento de los procesos de innovación.

Cabe mencionar que, la enseñanza está mediada por la actividad creativa y el aprendizaje por las emociones, cumpliendo un proceso no solo formativo sino en la constitución del sujeto, dado que ha permitido un desenvolvimiento en la creación de ideas, tareas, preguntas que interactúan con el entorno de forma autónoma. Frente a esto, la creatividad ha permitido desarrollar en la fantasía, el reconocimiento de espacios de comunicación en diversas expresiones, que se han incorporado como parte de la formación del ser humano, fortaleciendo a sus vez algunas inteligencias múltiples, como: corpóreo, lingüístico, musical, interpersonal, intrapersonal y espacial, que se dan a manera de experiencias en el aula de clase.

Ahora bien, en la escuela se busca generar una relación entre lo innovador y la creatividad en función tanto del aprendizaje como de la enseñanza, dado que la actitud creativa o la creatividad le permite al maestro y al educando, generar preguntas y resolver problemas de una manera rapida e innovadora. Por ende, en algunas instituciones educativas se considera que el sujeto más inteligente es aquel que tiene las calificaciones altas en el área de las ciencias básicas, dejando de lado el aspecto creativo en el proceso de valoración. Frente a esto, es importante comprender no solo cómo funcionan las inteligencias múltiples y su relación con las dimensiones del ser humano. Un sujeto creativo tiene la habilidad de proponer sus propios paradigmas o espectativas de cómo ve el mundo sin tener que recurrir a discursos tan elaborados y llenos de elementos adornados que no clarifican argumentos o permiten solucionar situaciones del cotidiano.

La creatividad no solo implica las acciones del sujeto, sino la formación en la escuela y la percepción de ver la realidad, por eso, es necesario revisar cómo se están dando esos modelos de enseñanza que porpicien espacios creativos en los sujetos, y es así como "La didáctica, como una disciplina o un saber, contenido por la pedagogía y la educación, es considerada un saber que tematiza el proceso de instrucción y guía sus métodos y estrategias, orientada por un pensamiento pedagógico […]" (Rodríguez, 2010, p. 67). Y llegar a entender las estrategias pedagogicas y las estructuras educativas que encierran a los sujetos en dinámicas de lo memorístico y no permiten el desarrollo de la imaginacion y la creatividad, haciendo que el aprendeizaje y la enseñanza esté orientado a la repetición. Entre tanto, la cultura de la memorización ha llegado año tras año a las escuelas, haciendo que los métodos de enseñanza se basen en los mejores resultados, sin tener cuidado con los sujetos que a futuro requieren de las ideas nuevas y de la imaginación, sin recurrir a la memoria para dar solución a problemas cotidianos. Con relación a lo anterior, es importante comprender que las didácticas y las prácticas pedagógicas innovadoras hacen que los sujetos potencien el recurso de la creatividad como un don nato en la resulución de situaciones que requieren de la inventiva.

Es natural que, las escuelas busquen que los sujetos potencien el desarrollo intelectual más que el desarrollo emocional; por ello, surge la preocupación por estudiar las problemáticas relacionadas con las prácticas pedagógicas y su relación con la capacidad creadora, además de ser una herramienta potente en la educación. Actualmente, se habla del desarrollo de la capacidad creadora o de creatividad, Betancourt (1999) dice que la capacidad creativa hace parte del potencial del ser humano, y que estructuralmente está formado por elementos cognoscitivos, afectivos e intelectuales con una visión de lo novedoso, y llega a ser "[…] objeto de estudio, de análisis, de reflexión, de creación al ser un medio de comunicación y por otro lado, es una herramienta para encontrar alianzas facilitadoras en la educación" (Giraldo, 2010, p. 7).

Ahora bien, se busca con la actividad creadora, generar espacios en los que se dé la crítica en los diversos contextos, en los cuales el sujeto desarrolle la capacidad creativa en la elaboración de las distintas tareas en las que no implique solo un proceso de memorización. Permitiendo así, consolidar en el sujeto un modelo integral y pedagógico a partir de los ambientes de aprendizaje, para esto "también existe un diálogo entre lo que se piensa y lo que se puede dibujar o vivenciar, la afinidad entre la forma y la deseada significación, lo cual es también una vía de ensayar el vocabulario de la comunicación" (Dinello, 2006, p. 48). Esto quiere decir que, no solo es lo que experimenta el sujeto frente en la formación y al proceso de comunicación; por el contrario, esta experiencia implica comprender los múltiples aspectos del entorno sin necesidad de estar atado a manejar unos contenidos o conocimientos específicos que se dan en la escuela.

> A lo que […] a veces, la forma en que se enseña el arte puede anular la creatividad y es posible que la enseñanza tiende a desarrollar la creatividad y anule el arte. Sin embargo, se han hecho experimentos centrados en metodos de enseñanza del arte que pueden contrubuir a asegurar el fomento tanto del arte como de la capacidad creadora. (Lowenfeld & Britain, 1980, p. 81).

Consecuentemente, la producción de procesos son intervenidos por un guía o tutor, que en este caso es el docente, quien genera estrategias que permiten potenciar procesos de pensamiento divergente o lateral[1], los cuales fomentan no solo la imaginación y el pensamiento creador, sino el desarrollo de talentos y habilidades. El

1 Edward De Bono, El pensamiento Lateral: manual de creatividad (2011). El pensamiento lateral aumenta la creatividad. El pensamiento lateral se basa en las características del mecanismo de la información de la mente.

pensamiento lateral fortalece la generación de ideas y la forma de percibir las cosas respondiendo con mayor rapidez a cualquier circunstancia, lo que aumenta la capacidad innovadora y representativa. "El pensamiento creador no constituye una forma extraordinaria de pensar, ni un proceso que ocurre solo al azar o la intuición, no se produce a través de saltos o por medio de pensamiento lateral o divergente [...]" (Jiménez, 2001, p. 78).

Por ende, en los procesos creativos se descubren y experimentan una diversidad de herramientas y componentes que permiten revelar el concepto de creatividad; la experiencia permite un espacio de interacción social, además de generar procesos expresivos y creativos que pueden ser mediados por el arte, al igual que de aquellas acciones sociales que son producto del desarrollo del trabajo colaborativo, donde se observa la creatividad como un puente en el campo formativo que contribuye a construir cambios que llevan a la inclusión de las personas, mediante estrategias de resistencia creativa como los preformances, flashmob, entre otras (García, 2014). De esta manera, al generar procesos de intercambio social, se producen relaciones sociales que propician la resolución de conflictos que se presentan durante o después de cualquier situación problémica.

Escuela y creatividad: pensamiento visual

Pensar la educación y la cultura audiovisual, implica que la escuela permita generar espacios óptimos para que los sujetos realicen representaciones de su realidad desde lenguajes estéticos e innovadores, además de pensarse otro tipo de lecturas que fomenten la alfabetización visual, involucrando la educación con imágenes, en las cuales se representen historias, realidades en las que los sujetos expresen desde sus vivencias su creatividad en el dibujo, la pintura, la fotografía, entre otras.

De esta manera, la alfabetización visual es entendida como la capacidad de comprender y utilizar las imágenes, de tal manera que el sujeto tiende a generar procesos de pensamiento, comunicarse y aprender en términos de imágenes, oralmente o a través de símbolos. Esto implica una relación muy poderosa entre el comprender lo que se ve, e imaginar el contenido. Por ende, la alfabetización se da mediante la comunicación como un sistema de enseñanza de la lecto-escritura, entendida como la lengua de una cultura, etnia, sociedad o pueblo en un sujeto, y que llega a fortalecerse específicamente en la etapa de su adultez.

Frente a esto, el comprender la imagen requiere de un compromiso con lo sensible de la imagen y el conocimiento que proporciona. Es decir, que el saber del espectador debe ir direccionado a encontrarse con su propia historia, comprender distintos universos desde las imágenes que pueden llegar a evocar. En este sentido, la escuela se ve enfrentada a la necesidad de cambiar sus estrategias tradicionales en una variedad de métodos, de prácticas novedosas, para generar procesos de reflexión, innovación en el desarrollo de un pensamiento reflexivo, divergente (lateral) y creativo. Lastimosamente, en ocasiones, las instituciones educativas dan poca importancia a las actividades relacionadas con la imaginación, lo artístico, lo estético y lo imaginativo, porque proporcionan los materiales y dan las instrucciones para el desarrollo de la actividad, que no deja pensar al educando; asimismo, se presenta el desconocimiento del tema por parte del educador, debido a que es una materia de relleno en el currículo.

Esto implica una profunda reflexión sobre la necesidad de potenciar la actividad creativa en la formación, y fomentar el desarrollo humano para enfrentar situaciones reales, brindando soluciones novedosas e innovadoras en la vida cotidiana; lo que conlleva a repensar la educación y el papel de los procesos creativos en relación con las artes.

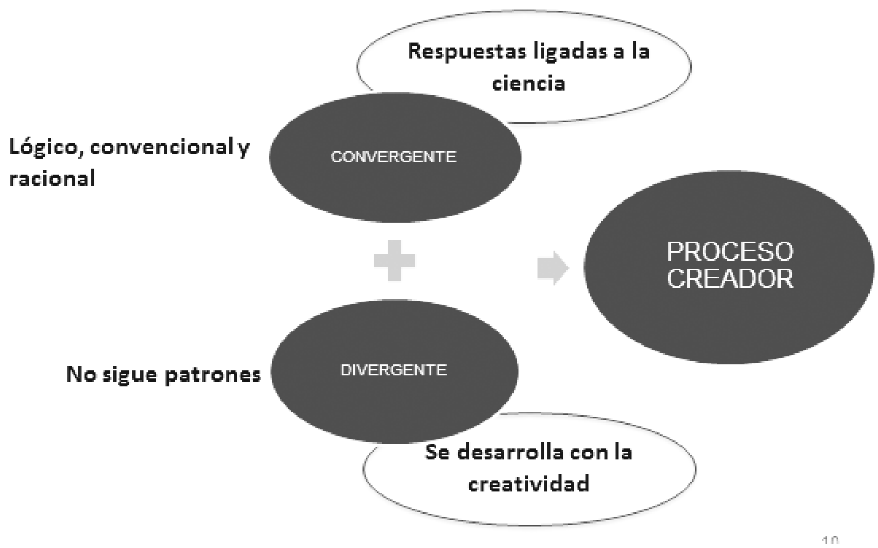


Figura 2. El Sistema creativo, desarrolla procesos que se dan mediados por las distintas imágenes.
Fuente: elaboración propia.

En la gráfica, se muestra cómo funciona el cerebro frente a los procesos que son intervenidos por las imágenes, a lo que se denominaría *proceso creador*, dado que representa una acción para potenciar habilidades. En la tesis de Betty Edwars (1984), sostiene que el cerebro se potencia mediante ejercicios artísticos y mejora la capacidad creativa del lado derecho del cerebro, dado que este viene dotado con la capacidad de desarrollar de manera equilibrada sus dos hemisferios.

Por consiguiente, el cerebro está dividido en dos partes: por un lado, la razón-lógica; y por el otro, los sentimientos-imaginación. En este sentido, el proceso creador está mediado por lo convergente y lo divergente, generando una gran cantidad de articulaciones mentales, en las que “el cerebro humano, de esta forma, parece tener dos sistemas de procesamiento preinstalados: uno para el aprendizaje en situaciones facilitantes y otro para situaciones engañosas” (Jiménez, 2001, p. 129).

Es fundamental, distinguir el papel de la creatividad en el currículum y su trabajo artículado con las diferentes áreas de conocimiento, que conduzcan al sujeto a producir algo nuevo, inesperado y apropiado; es decir, que responda a las características propias de la tarea propuesta, donde no solo se vea reflejado la inteligencia, los conocimientos, sino también los diferentes estilos de pensamiento y formas de aprendizaje, asi como las caraterístcas de su personalidad, donde confluye su aspeto emocional (Ferrandiz *et al.*, 2017).

A esto, la escuela debe generar ambientes formativos que conlleven a desarrollar el máximo potencial de los procesos mentales del sujeto. Además de propiciar una verdadera formación integral, para llegar a estimular y fortalecer las dimensiones humanas; que, como expresa Morín (1999), permitirían comprender la complejidad del ser humano y estimular no solo la capacidad de razonar, sino también su capacidad de crear, observando el trabajo de las siguientes dimensiones: fluidez, flexibilidad, originalidad y elaboración.

Por consiguiente, la escuela ha de tener una actitud abierta al cambio y mostrar diversos caminos tendientes, para que los sujetos logren su máximo desarrollo. Por eso, es esencial reconocer en las acciones creativas de los sujetos, las manifestaciones que se dan, en los entornos que propician estrategias orientadas al estudio de las imágenes y expresiones artísticas. Estas manifestaciones comprenden lenguajes visuales propiciados por la creatividad y la imaginación, que permiten no solo que el sujeto fortaleza los procesos cognitivos, sino su dimensión social, entre otras.

En este sentido, los docentes pueden implementar estrategias pedagógicas innovadoras en las que fomente la alfabetización mediante el uso de imágenes, ya sea un encuentro que medie entre los procesos de conocimiento y los creativos, dado que permiten el desarrollo de la imaginación y fantasía que conduce a la creación artística y estética de objetos, piezas musicales, dancísticas, entre otras. Teniendo en cuenta que la imaginación es un aspecto inherente y es parte de la actividad cotidiana, en ocasiones ha estado invisibilizado por falta de un profesional en esta área. Por ello, es necesario su fomento en las escuelas.

Figura 3. *Los lenguajes artísticos que se dan por el proceso de la creatividad.*
Fuente: elaboración propia.

En la figura, se muestran los lenguajes de la creatividad, ya que existe una conexión entre el espectador y el artista, ya que la obra transmite un mensaje, y el observador lo interpreta, apropia, asimila y comunica. Estos lenguajes permiten generar una serie de procesos asociados a la inventiva del sujeto y cómo son orientados a propiciar acciones asociadas a la creatividad. Por lo tanto, los procesos creativos y la creatividad se han dado desde siempre, es una particularidad innata de los seres humanos y, dadas las condiciones, se desarrollan y se potencian. Es por ello, que "los procesos creativos para solucionar problemas se hallan sujetos a la experiencia acumulada que tiene un sujeto [...]" (Jiménez, 2001, p. 79).

La creatividad se da como la capacidad del cerebro para generar ideas novedosas y conclusiones nuevas, para resolver problemas en una forma original, y por lo cual es una pieza importante para la comprensión del uso de las imágenes en los procesos formativos y de creación. A esto, la creatividad se caracteriza por un sistema en el que se desarrollan los lenguajes diversos y técnicas artísticas que potencien la creatividad.

Esto conlleva a ser un sistema circular, en el que el contexto es primordial para los procesos que se dan entre la creatividad y el desarrollo cognitivo del individuo. Por lo cual, la originalidad es un proceso de adaptabilidad, de pensar y producir nuevas ideas, potenciando el pensamiento divergente, siempre listo para sentir, observar e imaginar, dando soluciones a la variedad de problemáticas.

Sumado a esto, la creatividad permite nuevas alternativas o formas de comprender las diferentes estrategias que los sujetos analizan de su realidad, además, un sujeto que posea habilidades creativas, fomenta el liderazgo y el respeto a la diferencia, fortaleciendo las dimensiones del ser humano. Es decir, que el término de creatividad también se da en los contextos empresariales, de igual manera es acuñado a aquellos sujetos que tienen una manera diferente de actuar o reaccionar a una determinada situación. Con relación a lo anterior, es importante comprender que el sujeto potencia su habilidad creativa, no solo en espacios o ambientes que genera o propicia la escuela, lo que le permite construir aprendizajes novedosos, potenciando la imaginación y la innovación.

Conclusiones

En la reflexión, se encontró que en los procesos creativos mediados por las artes, se fomentan habilidades de pensamiento como las investigativas, perceptuales, de razonamiento y conceptualización, además del reconocimiento de manifestaciones artísticas, estéticas y su relación con lo visual, y frente a esto, es importante rescatar que no en todas las instituciones educativas es desconocida la actividad creadora y artística en las escuelas. Por consiguiente, la creatividad en la escuela permite mejorar los ambientes de aprendizaje y potenciar la imaginación mediante actividades en las que se dé la posibilidad de aprender realmente y fortalecer los conocimientos mediante la sensibilidad y la emoción del ser.

Ahora bien, los procesos de enseñanza y aprendizaje mediados por acciones o actitudes creativas de los sujetos, permiten acercar a la escuela a otras formas de expresión estimulando la imaginación además del pensamiento crítico, favoreciendo los procesos de enseñanza-aprendizaje dentro y fuera del aula; de igual manera, el arte en sí mismo, potencia la creatividad no solo desde la técnica, sino haciendo uso de la imaginación y del uso de variadas habilidades del pensamiento.

Al mismo tiempo, el arte permite el desarrollo de procesos creativos que favorecen la habilidad artística en un ejercicio de creación de objetos, desde la misma acción del sujeto en el desarrollo de sus ideas, potenciando sus destrezas, fortaleciendo la expresión y las habilidades de la percepción, observación y comunicación del mundo. De esta manera, animar a las comunidades educativas a contemplar nuevas opciones metodológicas que sean diferentes en los procesos de enseñanza y que vinculen el proceso del pensamiento crítico y creativo incentivando al disfrute desde la experiencia escolar.

La creatividad en la escuela, permite mejorar los ambientes de aprendizaje, y potenciar la didáctica, lo que propicia el disfrute de las actividades artísticas orientadas a promover el desarrollo de la creatividad gráfica, verbal y corporal. Frente a esto, la creación artística se observa en las invenciones, obras artísticas y hasta en los descubrimientos científicos. Finalmente, las artes y la creatividad se ven presentes en el desarrollo potenciando la fluidez verbal, la originalidad verbal y gráfica, la flexibilidad, la elaboración y la creatividad.

Referencias

Cerda, H. (2000). *La creatividad en la ciencia y la educación.* Bogotá, Colombia: Magisterio.

Dardoub, A. L. (2003). La creatividad en la escuela ¿una especie en peligro de extinción?, *DAL Soluciones Creativas*, 1-8. Reccuperado de https://www.google.com/url?sa=t&source=web&rct=j&url=http://www.naque.es/revistas/pdf/R30.pdf&ved=2ahUKEwjWvOXAxdjkAhWl1lkKHcS0AvkQFjAAegQIAhAB&usg=AOvVaw0Aqeisl-PmMW6J_RkD5Y9j

Dinello, R. (2006). *Ludocreatividad.* Bogotá, Colombia: Aula alegre, Magiaterio.

Esquivas, S. M. (2004). Creatividad:defniciones, antecedentes y aportaciones. *Digital Universitaria*, *5*(1), 2-17. Recuperado de http://www.revista.unam.mx/vol.5/num1/art4/art4.htm

Ferrandiz, C., Ferrando, M., Soto, G., Sainz, M., & Prieto, M. (2017). Divergent thinking and its dimensions: what we talk about and what we evaluate?. *Anales de Psicología, 33*(1), 40-47. https://dx.doi.org/10.6018/analesps.33.1.224371

Ferrero, R., Mitjáns, A., Montesino, L., Rodriguez, A., Ramo, M., & Waisburd, G. (2008). *La creatividad: un bien cultural de la humanidad.* México: Trillas.

García, O. (2014). Una mirada sobre los escenarios de la resistencia creativa ante la segregación y la exclusión del alumnado. *Revista de educación inclusiva*, *7*(1), 16-29. Recuperado de https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=4772620

Giraldo, H. J. (2010). El cine en la educación y la educación en el cine. *Miraton*, (10), 1-9. Recuperado de https://www.utp.edu.co/educacion/raton/antes/miraton10/textos/el%20cine%20en%20la%20%20educacion.pdf

Goleman, D., Kaufman, P., & Ray, M. (2016). *Espíritu creativo*. Barcelona, España: Ediciones B.

Jiménez, C. A. (2001). *Pedagogía de la creatividad y de la lúdica: emociones, inteligencia y habilidades secretos.* Bogotá, Colombia: Mesa redonda, Magisterio.

Lowenfeld, V. (1961). *Desarrollo de la capacidad creadora I*. Buenos Aires, Argentina: Kapelusz.

Lowenfeld, V., & Britain, W. (1980). *Desarrollo de la capacidad creadora.* Argentina: Kapelsz.

Morales, C. (2017). La creatividad, una revisión científica. *Arquitectura y Urbanismo*. XXXVIII, 53-62. Recuperado de http://rau.cujae.edu.cu/index.php/revistaau/article/view/420/392

Read, H. (1969). *Educación por el arte*. Barelona, España: Editorial Paidós.

Rodríguez, L. M. (2010). El cine, estrategia para el desarrollo de pensamiento. *Praxis & Saber*, *1*(2), 87-110. https://doi.org/10.19053/22160159.1100

Seltzer, K., & Bentley, T. (1999). *La era de la creatividad: conocimientos y habilidades para una nueva sociedad.* España: Aula XXI Santillana.

Normas

INSTRUCCIONES PARA AUTORES

NORMAS PARA AUTOR

No. 17 enero – diciembre de 2019 - ISSN 1657-463X
pp. 157 - 161

I. Declaración de buenas prácticas editoriales y normas éticas

La revista *C. Cient.* toma las medidas necesarias para evitar el fraude, plagio y malas prácticas. Por ello, se ha concebido la *Declaración de Buenas Prácticas y normas Éticas* (disponible en la página Web de la revista: https://www.jdc.edu.co/revistas/index.php/Cult_cient/about/submissions, en la cual se tiene en cuenta todas las partes involucradas en la publicación. Por lo anterior, se recomienda leer detalladamente este documento donde se establecen las responsabilidades de los autores, editores y evaluadores.

II. Recepción de artículos

Los artículos se deben enviar por correo electrónico a las direcciones: otri@jdc.edu.co o inicien@jdc.edu.co. El asunto del correo debe ser así: Entrega artículo RCC, (nombre del autor), (mes), (año). Además, se deben hacer llegar los siguientes documentos:

- Carta de presentación del autor (es) y su escrito, especificando la originalidad del texto y su contenido.
- Formato *Copyrigth* diligenciado (disponible en la página de la revista).
- CV que incluya: nombre, filiación institucional, dirección, Email, teléfono, formación académica y línea de investigación.

Se acusará recibo de los trabajos en el plazo de doce días a partir de la fecha de recepción. Tras la pertinente evaluación, por tres pares académicos temáticamente expertos, uno interno y dos externos, el Comité Editorial comunicará su resolución a los interesados (*Ver Descripción del proceso de evaluación de artículos* en la página Web de la revista). Finalmente, los autores cuyos artículos sean publicados recibirán dos ejemplares de la revista.

III. Tipos de publicación

1. *Artículo de investigación científica y tecnológica*. Documento que presenta, de manera detallada, los resultados originales de proyectos terminados de investigación. La estructura utilizada contiene: título, autor, resumen, palabras clave, abstract, keywords, introducción, materiales y métodos, resultados, discusión, conclusiones, agradecimientos (opcional) y bibliografía. Máximo 10 hojas, incluida la bibliografía, tablas y figuras.
2. *Artículo de reflexión*. Documento que presenta resultados de investigación terminada desde una perspectiva analítica, interpretativa o crítica del autor, sobre un tema específico, recurriendo a fuentes originales. Máximo 10 hojas, incluida la bibliografía, tablas y figuras.
3. *Artículo de revisión*. Documento resultado de una investigación terminada donde se analizan, sistematizan e integran los resultados de investigaciones publicadas o no publicadas, sobre un campo en ciencia o tecnología, con el fin de dar cuenta de los avances y las tendencias de desarrollo. Se caracteriza por

presentar una cuidadosa revisión bibliográfica de, por lo menos, 50 referencias. Su estructura no debe ceñirse a la estructura de los artículos de investigación en las secciones de introducción, métodos, resultados y discusión; pueden dividirse en secciones con sus debidos subtítulos. Máximo 10 hojas, incluida la bibliografía, tablas y figuras.

4. *Artículo corto.* Documento breve que presenta resultados originales preliminares o parciales de una investigación científica o tecnológica, que por lo general requieren de una pronta difusión. Máximo 5 hojas, incluida la bibliografía, tablas y figuras.

5. *Reporte de caso.* Documento que presenta los resultados de un estudio sobre una situación particular con el fin de dar a conocer las experiencias técnicas y metodológicas consideradas en un caso específico. Incluye una revisión sistemática comentada de la literatura sobre casos análogos. Máximo 5 hojas, incluida la bibliografía, tablas y figuras.

6. *Documento de reflexión no derivado de investigación*. Máximo 5 hojas, incluida la bibliografía, tablas y figuras.

7. *Reseña bibliográfica o de eventos*. Las reseñas de libros tendrán un mínimo de dos cuartillas y un máximo de cuatro. Se debe incluir carátula.

IV. Normas de presentación

Es requisito indispensable que, en el momento de la remisión, los artículos cumplan con los parámetros establecidos por la revista *C. Cient.*:

- Deberá estar escrito en cualquiera de los idiomas de la revista: español, inglés, francés, italiano y portugués.

- Estar escritos en formato Word, en hojas tamaño carta (21.59 x 27.94 cm), con tipo de letra Times New Roman, tamaño 12, usando mayúsculas y minúsculas, a interlineado 1.5, márgenes de 2 cm en todos los lados y una sola columna. Las páginas no deberán ir numeradas.

- Estar escritos en un lenguaje académico accesible a públicos de diferentes disciplinas.

- Como la revista tiene una forma de presentación y diseño (fotografía y policromía), es necesario enviar mínimo dos fotografías en alta resolución, que ilustren el contenido del documento.

- Los encabezados de los distintos apartados deberán ir en mayúsculas, en negrilla, centrados, sin numerar y dejando un espacio sencillo entre el encabezado y el texto. En lo posible, evitar párrafos demasiado largos.

- El titulo deberá ser lo más conciso posible y no exceder las 15 palabras, reflejando el contenido del trabajo, debe ir en mayúscula y centrado. Deberá estar escrito en el idioma elegido y traducido al español de no ser este el idioma manejado. Si se encuentra en español, deberá estar traducido al inglés.

- Los datos del autor deberán ir letra tamaño 12 con alineación a la derecha y a espacio sencillo. Colocar los datos en este orden: apellidos en mayúscula y nombres del autor o autores con el grado académico mayor, institución a la cual pertenece(n), dirección electrónica, teléfono o fax. Ejemplo:

José Francisco García Molano Ph.D.
Facultad de Ciencias Agrarias,
Fundación Universitaria Juan de Castellanos
Email: garciaf@jdc.edu.co
Tel: 3502530

- Tener un resumen de un solo párrafo no mayor a 250 palabras, que describa de modo breve y conciso los principales puntos tratados en el artículo y/o problema de investigación, los objetivos, metodología, resultados y conclusiones. En el resumen, no se incluyen citas bibliográficas, figuras, tablas o notas al pie. Se debe presentar la traducción fiel en inglés.

- Contener máximo 5 palabras clave separadas por punto y coma (;). Estas deben dar una idea general del tema, de tal forma que se permita su fácil identificación en las bases de datos de información científica. Deben ir inmediatamente al final del resumen o abstract, respectivamente. Evitar utilizar palabras que se encuentran en el título.

- En el caso de inclusión de figuras (imágenes, fotos, gráficos, mapas, diagramas, dibujos), la leyenda va en la parte inferior, tamaño 10 (**Figura XX**) y debe ocupar lo ancho de la figura. Las abreviaturas y símbolos en las figuras deben corresponder con aquellas señaladas en el texto; si no se encuentran en el texto, deben explicarse en la leyenda de la figura. Esta debe estar citada en el texto en paréntesis (p.e.: se observan manchas en la fruta (Figura XX)) o libre (p.e.: en la figura XX se muestran...); las que son compuestas deben señalarse con letras (Figura XXa), (Figura XXb). Cuando utilice algunas construidas o modificadas con programas informáticos especializados como Photoshop ®, Corel Draw ® u otro, envíelas en el formato original en que se hicieron y obligatoriamente en formato TIFF, no las pegue como imagen en Microsoft ® Word o Excel; si por el contrario son escaneadas, envíelas en TIFF, JPG en alta resolución (4961x3295 pixeles a 300 pdi o 2041x1356 pixeles a 72 dpi).

- En el caso de inclusión de tablas, la rotulación debe ir a la cabeza de la misma. El título debe ser conciso y autoexplicativo del contenido de la tabla (**Tabla XX** en negrita, leyenda en letra tamaño 10) y debe ocupar lo ancho de la tabla; las abreviaciones y símbolos utilizados deben aparecer al pie de la misma. La tabla debe estar citada en el texto en paréntesis (p.e.: no hay correlación entre los datos (Tabla XX)) o libre (p.e.: en la tabla XX se muestra...); las tablas compuestas deben señalarse con letras (Tabla XXa), (Tabla XXb). El explicativo de la tabla no debe ser una duplicación de la metodología del trabajo o del texto de los resultados. Recuerde que las tablas deben ser enviadas en archivo adjunto con los datos originales en formato Excel® para Windows.

- La revista acepta la citación en normas APA 6ta edición. Deberán listarse solamente las referencias incluidas en el texto. Se colocarán al final del texto y estarán ordenadas alfabéticamente por autor (es), seguido del año de publicación. Deberán incluirse los nombres de todos los autores de la referencia bibliográfica citada. En todos los casos en que el autor sea una Institución, cítelo como Anónimo. A continuación, se presentan los ejemplos tomados de la página https://apastyle.apa.org/learn/faqs/reference-book-review, allí se muestran las diferencias entre la forma de citar dentro del texto (**T**) y la forma de citar en la lista bibliográfica (**B**).

Libro de un solo autor:

T: Citas entre paréntesis: (Rabinowitz, 2019)

Citas narrativas: Rabinowitz (2019)

B: Rabinowitz, FE (2019). Profundización de la psicoterapia grupal con hombres: historias e ideas para el viaje. Asociación Americana de Psicología. https://doi.org/10.1037/0000132-000

Capítulo de libro:

T: Cita entre paréntesis: (Aron et al., 2019)

Cita narrativa: Aron et al. (2019)

B: Aron, L., Botella, M. y Lubart, T. (2019). Artes culinarias: el talento y su desarrollo. En RF Subotnik, P. Olszewski-Kubilius y FC Worrell (Eds.), *La psicología del alto rendimiento: desarrollo del potencial humano en talento específico de dominio* (págs. 345-359). Asociación Americana de Psicologia. https://doi.org/10.1037/0000120-016

Artículo de revista

T: Citas entre paréntesis: (Schaefer y Shapiro, 2019; Schulman, 2019)

Citas narrativas: Schaefer y Shapiro (2019) y Schulman (2019)

B: Schaefer, NK y Shapiro, B. (6 de septiembre de 2019). Nuevo capítulo intermedio en la historia de la evolución humana. Science, 365 (6457), 981-982. https://doi.org/10.1126/science.aay355

Tesis o disertación y otros documentos inéditos:

T: (Tovar-Paredes, 2004)

B: Tovar-Paredes, J. 2004. Bases para el mejoramiento de sistemas campesinos de producción avícola en la zona de influencia de la selva de Florencia. Universidad de Caldas. Tesis. Colombia 82pp.

Recursos electrónicos:

T: (Instituto Nacional de Salud Mental, 2018)

B: Instituto Nacional de Salud Mental. (2018, julio). Trastornos de ansiedade. Departamento de Salud y Servicios Humanos de E.E. U.U. Institutos Nacionales de Salud. https://www.nimh.nih.gov/health/topics/anxiety-disorders/index

Juan de Castellanos
EDITORIAL

Contenido

INVESTIGACIÓN
CON PROPÓSITO JDC

DIRECCIÓN GENERAL DE
INVESTIGACIÓN E INNOVACIÓN